Condition de Neumann non homogène

On considère par exemple le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{sur } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On s'intéresse à la condition de Neumann et à la régularité nécessaire pour qu'elle soit vérifiée. On suppose que l'espace de Hilbert dans lequel la formulation variationnelle est posée est $H^1(\Omega)$.

On sait (voir cours ou TD) que l'EDP est vérifiée au sens des distributions puisque l'espace $D(\Omega)$ est inclus dans $H^1(\Omega)$. La difficulté provient de l'application du théorème de régularité elliptique du cours. En effet, celui-ci présuppose que la formulation variationnelle s'écrit

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \; dx = \int_\Omega fv \; dx,$$

alors que la condition de Neumann non homogène introduit un terme supplémentaire

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \; dx = \int_\Omega fv \; dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0(v) \; d\sigma(x).$$

On ne peut donc pas l'appliquer !

Pour résoudre le problème, on doit considérer l'application

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^1(\Omega)^N &\to L^2(\partial\Omega) \\ V &\mapsto \gamma_0 V \cdot n \end{aligned}$$

qui est l'opérateur trace associé à la condition de Neumann (N est la dimension d'espace). On peut montrer que, si Ω est suffisamment régulier,

$$\gamma_1(H^1(\Omega)^N) = H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Par conséquent, pour appliquer une technique de relèvement similaire à celle pour le problème de Dirichlet non homogène, on doit supposer que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour introduire $G \in H^1(\Omega)^N$ tel que

$$\gamma_1 G = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et on peut retomber sur une formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \; dx = \int_\Omega \bar{f} v \; dx,$$

où $\bar{f}$ dépend de f et de G. On peut alors utiliser le résultat de régularité elliptique.

Remarque. On peut enlever le terme $+u$ à l'EDP en changeant l'espace de travail. On peut aussi faire de même pour traiter une condition de type Robin.