Master 1 Mathématiques — Équations elliptiques
Université de Rennes 1 et ENS Rennes — 2017-2018

Devoir maison

26 Février 2018

Exercice 1.
Soit l'application suivante, définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \qquad \langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,t)dt.$$

1. Démontrer que u est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$.

Exercice 2.
Sur l'intervalle $]0,1[$, on considère l'espace suivant :

$$W = \left\{ u \in L^2(0,1) : \quad \sqrt{x}\, u' \in L^2(0,1) \right\},$$

où u' désigne la dérivée de u au sens de $\mathcal{D}'(]0,1[)$, muni de la norme

$$\|u\|_W = \left(\int_0^1 (x\,|u'(x)|^2 + |u(x)|^2)\, dx \right)^{1/2}.$$

On désigne par W_0 l'adhérence de $\mathcal{D}(]0,1[)$ dans W, et l'on note

$$|u|_W = \left(\int_0^1 x\,|u'(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

1. Montrer que W et W_0 sont des espaces de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_W$.

2. Montrer que, pour tout $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$, on a les inégalités suivantes :

$$\forall\, x \in]0,1], \quad |v(x)| \leq |\log x|^{1/2}\, |v|_W \qquad \text{et} \qquad \|v\|_{L^2(0,1)} \leq |v|_W.$$

   Indication : on pourra partir de la relation $v(x) = -\int_x^1 v'(t)\, dt$.

3. Déduire de la question précédente que, sur W_0, $\|\cdot\|_W$ et $|\cdot|_W$ sont deux normes équivalentes et que $1 \notin W_0$.

4. On pose $g(x) = \log \frac{e}{x}$; pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $g^\alpha \in W$?

5. Montrer que l'application $v \mapsto g^{-1/2}v$ est continue de $(W_0, |\cdot|_W)$ dans $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty(0,1)})$. En déduire que $W_0 \subset C^0(]0,1])$ et que $W_0 \subset \{v \in W\,; v(1) = 0\}$.

Exercice 3.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\mathrm{sign}(t)$ le signe de t, autrement dit:

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ \ \ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$, lipschitzienne, telle que $T(0) = 0$. Montrer que, pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $T(u) \in H^1(\Omega)$ avec $\nabla(T(u)) = T'(u)\nabla u$.

2. Soient $j(t) = |t|$ et pour $\epsilon > 0$, $j_\epsilon(t) = (\epsilon^2 + t^2)^{1/2} - \epsilon$. Montrer que j_ϵ est convexe et que $0 \le j_\epsilon(t) \le j(t)$. Vérifier aussi que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} j_\epsilon(t) = j(t), \quad \lim_{\epsilon \to 0} j'_\epsilon(t) = \mathrm{sign}(t).$$

   Quelle est la limite (dans un sens approprié) de j''_ϵ ?

3. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega j_\epsilon(u(x))\varphi(x)\,dx = \int_\Omega |u(x)|\varphi(x)\,dx,$$

$$\forall i, \quad \lim_{\epsilon \to 0} \int_\Omega \partial_{x_i}(j_\epsilon(u(x)))\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \mathrm{sign}(u(x))\partial_{x_i}u(x)\varphi(x)\,dx.$$

   Montrer que $|u| \in H^1(\Omega)$ et que

$$\nabla|u| = \mathrm{sign}(u)\nabla u.$$

4. On considère maintenant une fonction $u \in H^1(\Omega)$ telle que $\Delta u \in L^1(\Omega)$. Calculer $\Delta(j_\epsilon(u))$ et vérifier que c'est un élément de $L^1(\Omega)$. En déduire que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\varphi \ge 0$, on a

$$\int_\Omega j_\epsilon(u(x))\Delta\varphi(x)\,dx \ge \int_\Omega j'_\epsilon(u(x))\Delta u(x)\varphi(x)\,dx.$$

   Montrer que $j'_\epsilon(u)\Delta u \to \mathrm{sign}(u)\Delta u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, puis que l'on a l'inégalité suivante au sens des distributions :

$$\Delta|u| \ge \mathrm{sign}(u)\Delta u.$$

   Exemple : examiner le cas de la fonction $u(x) = x$ sur l'intervalle $]-1,1[$.