# Examen terminal

⋆ ⋆ ⋆

Mercredi 27 avril 2016. Durée : 2 heures.
*Seules les notes de cours sont autorisées.*
*Le sujet comporte deux exercices indépendants.*

## Exercice 1.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné, de classe $\mathcal{C}^2$, connexe, de frontière $\partial\Omega$. La normale unitaire sortante en un point $x \in \partial\Omega$ est notée $n(x)$. On se donne une fonction $F \in L^2(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On s'intéresse au problème suivant, dont l'inconnue est la fonction $U(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ :

$$\begin{cases} -\Delta U = F & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = iU & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. On note $f_1 = \mathcal{R}e\,F$ et $f_2 = \mathcal{I}m\,F$. Écrire le système satisfait par les deux fonctions à valeurs réelles $u_1 = \mathcal{R}e\,U$ et $u_2 = \mathcal{I}m\,U$.

2. Montrer qu'une solution forte $u = (u_1, u_2) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ de ce problème satisfait la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u \in V \\ \forall v = (v_1, v_2) \in V, \qquad a(u, v) = \ell(v), \end{cases} \tag{2}$$

où $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, la forme bilinéaire $a$ et la forme linéaire $\ell$ étant définies par

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_\Omega (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2)\, dx + \int_{\partial\Omega} (u_2 v_1 - u_1 v_2)\, d\sigma, \\ \ell(v) &= \int_\Omega (f_1 v_1 + f_2 v_2)\, dx. \end{aligned}$$

On dira qu'une telle fonction est solution faible de (1).
*N.B. : La norme sur l'espace produit $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ sera $\|u\|_V = \sqrt{\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2}$.*

3. Montrer que la forme bilinéaire $a$ n'est pas coercive sur $V$.

4. Montrer que (2) est équivalente à la formulation variationnelle

$$\begin{cases} u \in V \\ \forall v \in V, \qquad \widetilde{a}(u, v) = \widetilde{\ell}(v), \end{cases} \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned}\widetilde{a}(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u_1 \cdot \nabla(v_1+v_2) + \nabla u_2 \cdot \nabla(v_2-v_1))\,dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (u_2(v_1+v_2) + u_1(v_1-v_2))\,d\sigma, \\ \widetilde{\ell}(v) &= \int_\Omega (f_1(v_1+v_2) + f_2(v_2-v_1))\,dx.\end{aligned}$$

5. Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma \geq \alpha \int_\Omega u^2 dx,$$

puis que la forme bilinéaire $\widetilde{a}$ est coercive sur $V$.

6. Montrer que (1) admet une unique solution faible.

7. Démontrer que toute solution $u$ de (2) est dans $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ (on ne redémontrera pas des résultats vus en cours), puis qu'elle est solution forte du problème.

## Exercice 2. **Problème mixte**

Dans $\mathbb{R}^d$, on note $|\cdot|$ la norme euclidienne, $B_r$ la boule ouverte centrée en 0, de rayon $r$ et $S_r$ sa frontière. Soient $0 < r_1 < r_2$. On pose $\Omega = B_{r_2} \setminus \overline{B_{r_1}}$ avec donc $\partial\Omega = S_{r_2} \cup S_{r_1}$. Dans cet exercice, on cherche à résoudre le problème elliptique :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \tag{4}$$

avec les conditions aux limites suivantes, dites mixtes :

$$u = 0 \text{ sur } S_{r_1}, \text{ (Dirichlet)}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } S_{r_2}, \text{ (Neumann)}. \tag{6}$$

Ici $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction donnée, et pour tout $x \in \partial\Omega$, $n(x)$ désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$, unitaire sortant.

1. On définit l'espace fonctionnel suivant :

$$V = \{u \in H^1(\Omega) \;:\; u = 0 \text{ sur } S_{r_1}\}.$$

Démontrer l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\exists C > 0,\ \forall u \in V, \quad \|\nabla u\|_{L^2} \geq \|u\|_{L^2}.$$

2. Soit $u \in H^2(\Omega)$ une solution de (4) au sens des distributions vérifiant (5) et (6) au sens des traces. Montrer que $u$ est solution faible au sens où

$$\forall v \in V, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

3. Démontrer qu'il existe une unique solution faible $u$.

4. On veut maintenant montrer que cette solution faible appartient bien à l'espace $H^2(\Omega)$, ceci en s'appuyant sur les théorèmes de régularité elliptique vus dans le cours.
Pour cela, on introduit $0 < \epsilon < \dfrac{r_2 - r_1}{3}$ et une fonction de troncature $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\psi(x) = 0, \text{ si } |x| \leq r_1 + \epsilon, \quad \psi(x) = 1, \text{ si } r_2 - \epsilon \leq |x| \leq r_2.$$

(a) Démontrer que, pour tout $u \in H^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a les deux identités suivantes :

$$\int_\Omega \nabla(\psi u) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\psi v) \, dx - 2 \int_\Omega v \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx - \int_\Omega u v \Delta \psi \, dx,$$

$$\int_\Omega \nabla((1-\psi)u) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla((1-\psi)v) \, dx + 2 \int_\Omega v \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx + \int_\Omega u v \Delta \psi \, dx.$$

(b) Soit $u$ la solution faible considérée. Déduire de l'identité précédente que $(1-\psi)u$ est solution faible d'un problème de Dirichlet :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla((1-\psi)u) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f_1 v \, dx$$

avec $f_1 \in L^2(\Omega)$ qui sera précisée, puis en déduire que $(1-\psi)u \in H^2(\Omega)$.

(c) Obtenir de même que $\psi u$ est solution faible d'un problème de Neumann :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla(\psi u) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f_2 v \, dx.$$

avec $f_2 \in L^2(\Omega)$ qui sera précisée, puis en déduire que $\psi u \in H^2(\Omega)$.

(d) Conclure.

5. En déduire que (4), (5), (6) admet une unique solution $u \in H^2(\Omega)$.

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$