

Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie

Edwige Godlewski & Nicolas Seguin
Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

[Version du 1^{er} mai 2011 ¹]

Résumé. Le but de ce cours est d'étudier les modèles d'écoulements de fluides complexes décrits par des EDP hyperboliques dans les contextes de l'énergie hydraulique, de l'exploitation des hydrocarbures des réacteurs nucléaires. On abordera notamment les écoulements à surface libre, les écoulements en milieu poreux et les écoulements diphasiques. Leur étude sera effectuée à la fois d'un point de vue théorique et du point de vue de l'approximation numérique.

1. Ceci est une version provisoire. N'hésitez pas à me contacter si vous trouvez des erreurs ou coquilles, ou si vous avez des suggestions d'améliorations : nicolas.seguin@upmc.fr.

Table des matières

I	Rappels sur les modèles hyperboliques	4
II	Énergie hydraulique	5
1	Dérivation des équations	5
1.1	Équations de Navier-Stokes et adimensionnement	5
1.2	Équations sur une colonne d'eau	7
1.3	Développement asymptotique et hypothèse hydrostatique	8
1.4	Équations hydrostatiques	9
1.5	Équations de Saint-Venant	10
2	Équations de Saint-Venant avec topographie et friction	10
2.1	Solutions stationnaires	12
2.1.1	Lac au repos	13
2.1.2	Équilibre sans friction : théorème de Bernoulli	13
2.2	Solutions particulières	14
2.2.1	Roll waves	14
2.2.2	Écoulements à friction dominante	15
3	Méthodes numériques pour les systèmes avec terme source	16
3.1	Splitting d'opérateur	16
3.2	Discrétisation directe du terme source	18
3.3	Schémas équilibres	18
3.3.1	Schémas de type Godunov	19
3.3.2	Schémas avec reconstruction	22
3.4	Schémas préservant l'asymptotique	23
3.5	Pour aller plus loin...	26
3.5.1	Passage au 2D	26
3.5.2	Termes sources plus compliqués	26
3.5.3	Stabilité linéaire et non linéaire	27
III	Exploitation des hydrocarbures	28
1	Un modèle simplifié d'écoulement diphasique en milieu poreux	28
2	Formulation entropique	29
3	Unicité de la solution	31
4	Schéma volumes finis	33
4.1	Écriture du schéma	33
4.2	Propriétés du schéma numérique	34
4.3	Convergence du schéma numérique et existence d'une solution	35

IV	Écoulements diphasiques compressibles	36
1	Modélisation des écoulements diphasiques compressibles	37
1.1	Équations locales instantanées	37
1.2	Un modèle simple de mélange de fluides non miscibles sans transfert de masse	39
1.3	Moyenne statistique	40
1.4	Réduction de dimension : moyenne spatiale	42
1.4.1	Modèle local instantané	42
1.4.2	Équations sur les fractions	44
1.4.3	Conservation des masses partielles	44
1.4.4	Quantités de mouvement horizontal	44
1.4.5	Quantités de mouvement vertical	45
1.4.6	Fermeture des équations	45
1.4.7	Le modèle final issu de la dérivation	46
1.4.8	Propriétés du modèle obtenu	47
	Bibliographie	49

Chapitre I

Rappels sur les modèles hyperboliques

Chapitre II

Énergie hydraulique

On s'intéresse dans ce chapitre aux problématiques liées à la production d'énergie par l'écoulement de l'eau en milieu « naturel » : rivières, fleuves et lacs pour les barrages hydroélectriques, écoulements côtiers pour les systèmes houlomoteurs. On regardera les configurations d'écoulements d'eau pour lesquels la surface est libre (l'air ne modifie pas l'écoulement de l'eau), sans déferlement. Cela permet d'effectuer plusieurs hypothèses simplificatrices permettant d'obtenir un modèle, somme toute, relativement abordable théoriquement et numériquement. À noter que le champ d'application des modèles étudiés ici est même plus large, il inclut notamment le transport de polluant par un courant marin, l'écoulement dans les lacs et autres eaux « peu profondes », la propagation de tsunamis (au prix d'éventuelles améliorations...).

1 Dérivation des équations

Comme cela vient d'être mentionné, l'hypothèse importante est la faible profondeur de l'eau par rapport à la dimension du domaine. On se place dans le cas d'un fond plat rugueux (qui va donc engendrer de la friction) avec une surface libre (on en précisera le sens un peu plus tard) qui ne déferle pas. Ainsi, les seules forces appliquées à l'eau sont la gravité et la friction du sol ; on pourrait ajouter notamment un sol non plat, de la friction avec l'air pour la prise en compte du vent, de la tension superficielle pour l'interface entre l'air et l'eau... mais dans la plupart de ces cas, la dérivation des équations est plus difficile.

1.1 Équations de Navier-Stokes et adimensionnement

Pour simplifier les calculs, on se place en une dimension horizontale x , en plus de la dimension verticale z , voir figure II.1. L'eau est décrite par les équations de Navier-Stokes incompressible, c'est-à-dire que l'eau est supposée être un fluide visqueux et incompressible à cette échelle, dont la masse volumique est supposée égale à 1 :

$$\begin{aligned}\partial_x v_1 + \partial_z v_3 &= 0, \\ \partial_t v_1 + \partial_x(v_1^2) + \partial_z(v_1 v_3) + \partial_x p &= \mu \Delta v_1, \\ \partial_t v_3 + \partial_z(v_3^2) + \partial_x(v_1 v_3) + \partial_z p &= \mu \Delta v_3 - g,\end{aligned}\tag{II.1}$$

équations qui sont posées pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $0 \leq z \leq h(t, x)$, $h(t, x)$ étant la hauteur d'eau, et $\mathbf{v}(t, x, z) = (v_1, v_3)(t, x, z)$ et $p(t, x, z)$ sont la vitesse et la pression de l'eau. Les

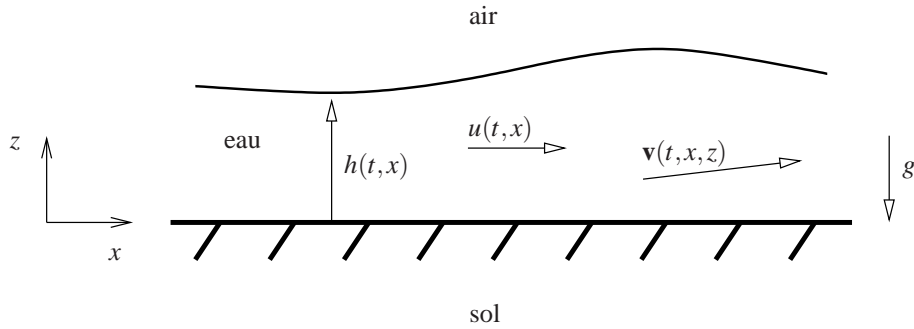


FIGURE II.1 – Représentation d'un écoulement à surface libre

constantes positives μ et g représentent la viscosité et la gravité. On introduit de plus le tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu \begin{pmatrix} 2\partial_x v_1 & \partial_z v_1 + \partial_x v_3 \\ \partial_z v_1 + \partial_x v_3 & 2\partial_z v_3 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{n}_S(t, x)$ la normale à la surface, donc égale à $(-\partial_x h, 1)^T$ (il n'est pas nécessaire qu'elle soit unitaire dans la suite). En plus des équations (II.1), on ajoute les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t, x, h(t, x)) \cdot \mathbf{n}_S(t, x) &= 0, \\ v_3(t, x, 0) &= 0, \\ (\kappa v_1 - \mu \partial_z v_1)(t, x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{II.2}$$

La première condition traduit la notion de surface libre : aucune contrainte (en particulier due à l'air) n'agit sur la surface de l'eau. La deuxième traduit l'imperméabilité du sol et la troisième, dite loi de paroi de Navier, permet de prendre en compte la rugosité du sol *via* le coefficient de friction $\kappa > 0$: en $\kappa = 0$, on obtient une condition de réflexion pure et si $\kappa \rightarrow +\infty$, on obtient une condition de Dirichlet homogène.

On définit maintenant la fonction indicatrice de l'eau

$$\chi(t, x, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq z \leq h(t, x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La région occupée par le fluide est convectée par l'écoulement, ce qui se traduit, en utilisant l'incompressibilité de l'eau, par

$$\partial_t \chi + \partial_x (v_1 \chi) + \partial_z (v_3 \chi) = 0.$$

Cette équation peut s'interpréter aussi comme l'équation de conservation du volume occupé par l'eau (ou de manière équivalente, de la masse).

Passons maintenant à l'adimensionnement des équations. Notons H , L et U les hauteur d'eau, taille du domaine et vitesse caractéristiques de l'écoulement. On note $\varepsilon = H/L$ (qui va donc tendre vers 0 comme son nom l'indique, ce qui va correspondre donc à l'hypothèse de faible profondeur). On introduit les variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x/L, & \tilde{z} &= z/H = z/(\varepsilon L), & \tilde{t} &= tU/L, \\ \tilde{v}_1 &= v_1/U, & \tilde{v}_3 &= v_3/(\varepsilon U), & \tilde{p} &= p/U^2. \end{aligned}$$

On en déduit directement les équations de Navier-Stokes modifiées suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{U}{L} \left[\partial_{\tilde{x}} \tilde{v}_1 + \partial_{\tilde{z}} \tilde{v}_3 \right] &= 0, \\ \frac{U^2}{L} \left[\partial_t \tilde{v}_1 + \partial_{\tilde{x}} (\tilde{v}_1^2) + \partial_{\tilde{z}} (\tilde{v}_1 \tilde{v}_3) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{p} \right] &= \mu \frac{U}{L^2} \left[\partial_{\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{v}_1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\tilde{z}\tilde{z}} \tilde{v}_1 \right], \\ \frac{\varepsilon U^2}{L} \left[\partial_t \tilde{v}_3 + \partial_{\tilde{z}} (\tilde{v}_3^2) + \partial_{\tilde{x}} (\tilde{v}_1 \tilde{v}_3) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\tilde{z}} \tilde{p} \right] &= -g + \mu \frac{\varepsilon U}{L^2} \left[\partial_{\tilde{x}\tilde{x}} \tilde{v}_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{\tilde{z}\tilde{z}} \tilde{v}_3 \right],\end{aligned}$$

qui se réécrivent en introduisant le nombre de Reynolds $\text{Re} = UL/\mu$ et le nombre de Froude $\text{Fr} = U/\sqrt{gH}$ et en enlevant les ~

$$\begin{aligned}\partial_x v_1 + \partial_z v_3 &= 0, \\ \partial_t v_1 + \partial_x (v_1^2) + \partial_z (v_1 v_3) + \partial_x p &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\partial_{xx} v_1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{zz} v_1 \right], \\ \varepsilon^2 [\partial_t v_3 + \partial_z (v_3^2) + \partial_x (v_1 v_3)] + \partial_z p &= \frac{1}{\text{Re}} [\varepsilon^2 \partial_{xx} v_3 + \partial_{zz} v_3] - \frac{1}{\text{Fr}^2}.\end{aligned}\tag{II.3}$$

Concernant les conditions aux limites, on en déduit tous calculs faits

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 (\text{Re} p - 2\partial_x v_1) \partial_x h + \partial_z v_1 + \varepsilon^2 \partial_x v_3 &= 0 \quad \text{pour } z = h(t, x), \\ \text{Re} p - 2\partial_z v_3 + (\partial_z v_1 + \varepsilon^2 \partial_x v_3) \partial_x h &= 0 \quad \text{pour } z = h(t, x), \\ v_3 &= 0 \quad \text{pour } z = 0, \\ \alpha \varepsilon \text{Re} v_1 - \partial_z v_1 &= 0 \quad \text{pour } z = 0,\end{aligned}\tag{II.4}$$

où $\alpha = \kappa/U$.

1.2 Équations sur une colonne d'eau

Tout d'abord, on peut facilement vérifier que l'équation sur χ est invariante par l'adimensionnement. Soit $\bar{H} > 0$ tel qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $h(t, x) + \delta \leq \bar{H}$ pour tout t et x . En intégrant verticalement cette équation entre 0 et \bar{H} on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^{\bar{H}} \chi(t, x, z) dz + \partial_x \int_0^{\bar{H}} \chi(t, x, z) v_1(t, x, z) dz \\ + \chi(t, x, \bar{H}) v_3(t, x, \bar{H}) - \chi(t, x, 0) v_3(t, x, 0) &= 0\end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant la deuxième condition de (II.2)

$$\partial_t h(t, x) + \partial_x \int_0^{h(t, x)} v_1(t, x, z) dz = 0.\tag{II.5}$$

Si maintenant on intègre l'équation sur χ entre 0 et $h(t, x)$, on a¹

$$\begin{aligned}\partial_t h(t, x) dz + \partial_x \int_0^{h(t, x)} v_1(t, x, z) dz \\ - (\partial_t h(t, x) + v_1(t, x, h(t, x)) \partial_x h(t, x) - v_3(t, x, h(t, x))) &= 0\end{aligned}$$

1. Grâce à la relation $\int_0^{h(t, x)} \partial_\alpha f(t, x, z) dz = \partial_\alpha \int_0^{h(t, x)} f(t, x, z) dz - f(t, x, h(t, x)) \partial_\alpha h(t, x)$, $\alpha = t, x$.

dont on déduit l'équation de déplacement de la surface

$$\partial_t h(t, x) + v_1(t, x, h(t, x)) \partial_x h(t, x) - v_3(t, x, h(t, x)) = 0, \quad (\text{II.6})$$

qui peut aussi s'écrire $\partial_t h = \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{v}$ (à noter que la normale utilisée ici n'est pas unitaire).

Regardons maintenant l'équation vérifiée par le moment horizontal. Pour cela, on réécrit l'équation sur v_1 de (II.3) :

$$\begin{aligned} \partial_t v_1 + \partial_x (v_1^2) + \partial_z (v_1 v_3) + \partial_x p &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\partial_{xx} v_1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{zz} v_1 \right], \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \partial_{xx} v_1 + \partial_z \left(\partial_x v_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z v_1 \right) \right] \end{aligned}$$

en utilisant la contrainte d'incompressibilité. On intègre cette équation pour $z \in [0, h]$, qui devient

$$\begin{aligned} &\partial_t \int_0^h v_1 dz - v_1|_{z=h} \partial_t h + \partial_x \int_0^h (v_1)^2 dz - (v_1)^2|_{z=h} \partial_x h \\ &\quad + (v_1 v_3)|_{z=h} - (v_1 v_3)|_{z=0} + \partial_x \int_0^h p dz - p|_{z=h} \partial_x h \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \partial_x \int_0^h \partial_x v_1 dz - 2 (\partial_x v_1)|_{z=h} \partial_x h \right. \\ &\quad \left. + \left(\partial_x v_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z v_1 \right) \Big|_{z=h} - \left(\partial_x v_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z v_1 \right) \Big|_{z=0} \right]. \end{aligned}$$

En réagencant quelques termes,

$$\begin{aligned} &\partial_t \int_0^h v_1 dz + \partial_x \int_0^h (v_1)^2 dz + \partial_x \int_0^h p dz \\ &\quad - v_1|_{z=h} (\partial_t h + v_1|_{z=h} \partial_x h - v_3|_{z=h}) - (v_1 v_3)|_{z=0} \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \left[2 \partial_x \int_0^h \partial_x v_1 dz - \left(\partial_x v_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z v_1 \right) \Big|_{z=0} \right. \\ &\quad \left. + \left((\text{Re} p - 2 \partial_x v_1) \partial_x h + \partial_x v_3 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z v_1 \right) \Big|_{z=h} \right], \end{aligned}$$

on peut utiliser les conditions aux limites (II.4) et l'équation de la surface (II.6), ce qui donne l'équation vérifiée par le moment horizontal

$$\partial_t \int_0^h v_1 dz + \partial_x \int_0^h (v_1)^2 dz + \partial_x \int_0^h p dz = \frac{2}{\text{Re}} \partial_x \int_0^h \partial_x v_1 dz - \frac{\alpha}{\varepsilon} v_1|_{z=0}. \quad (\text{II.7})$$

1.3 Développement asymptotique et hypothèse hydrostatique

Jusqu'à présent, on n'a effectué aucune approximation, les systèmes successifs sont équivalents. La suite relève de l'analyse asymptotique formelle : on va négliger les termes en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ et les variables seront donc indicées par ε pour se souvenir qu'elles résolvent les équations de Navier-Stokes avec une erreur d'ordre ε (au plus). Le fait que ε tende vers 0 signifie qu'on est en eau peu profonde et que l'écoulement est

principalement horizontal : c'est l'approximation hydrostatique. On va voir que les conséquences en sont des résultats bien connus.

Tout d'abord, on peut déduire de la deuxième équation de (II.3) et des première et quatrième équations de (II.4) que

$$\partial_{zz}v_{1\varepsilon}(t,x,z) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ pour } z \in [0, h_\varepsilon(t,x)] \quad \text{et} \quad \begin{cases} \partial_z v_{1\varepsilon}(t,x,0) = 0 \\ \partial_z v_{1\varepsilon}(t,x, h_\varepsilon(t,x)) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} ,$$

ce qui donne finalement

$$v_{1\varepsilon}(t,x,z) = v_{1\varepsilon}(t,x,0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \text{ pour } z \in [0, h_\varepsilon(t,x)]. \quad (\text{II.8})$$

Cela signifie que la vitesse horizontale ne varie que très peu le long de la direction verticale. Par ailleurs, les deux premières équations de (II.4) permettent d'avoir en $z = h(t,x)$

$$\varepsilon^2(\text{Re}p - 2\partial_x v_1)(\partial_x h)^2 = 2\partial_z v_3 - \text{Re}p.$$

De la dernière équation on peut alors avoir une condition sur p_ε :

$$p_\varepsilon = \frac{2}{\text{Re}} \partial_z v_{3\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{pour } z = h_\varepsilon(t,x).$$

De plus, la troisième équation de (II.3) devient

$$\partial_z p_\varepsilon = \frac{1}{\text{Re}} \partial_{zz} v_{3\varepsilon} - \frac{1}{\text{Fr}^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

qui, intégrée le long de la direction verticale sur $[z, h_\varepsilon]$ et grâce à la condition sur p_ε en $z = h_\varepsilon$, donne

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\text{Re}} \partial_z v_{3\varepsilon}(t,x, h_\varepsilon) - p_\varepsilon(t,x,z) \\ &= \frac{1}{\text{Re}} (\partial_z v_{3\varepsilon}(t,x, h_\varepsilon) - \partial_z v_{3\varepsilon}(t,x,z)) - \frac{1}{\text{Fr}^2} (h_\varepsilon - z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En utilisant l'incompressibilité de l'eau (c'est-à-dire la première équation de (II.3)), on a finalement

$$p_\varepsilon(t,x,z) = \frac{1}{\text{Fr}^2} (h_\varepsilon(t,x) - z) - \frac{1}{\text{Re}} (\partial_x v_{1\varepsilon}(t,x, h_\varepsilon(t,x)) + \partial_x v_{1\varepsilon}(t,x,z)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (\text{II.9})$$

On peut remarquer que si la viscosité est nulle (i.e. le nombre de Reynolds Re infini), alors la pression de l'eau ne dépend que de la gravité, c'est la pression hydrostatique (on rappelle que dans le cas incompressible, la pression est définie à une constante près, qui serait ici la pression atmosphérique).

1.4 Équations hydrostatiques

Le but est maintenant d'obtenir un système fermé basé simplement sur la hauteur d'eau et sur la vitesse horizontale, on veut donc faire « disparaître » la vitesse verticale et la coordonnée z des équations (II.5) et (II.7) sur la base de l'approximation hydrostatique, donc de (II.8) et (II.9). Tout d'abord, définissons la vitesse moyenne sur une colonne d'eau

$$\bar{u}_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{h_\varepsilon(t,x)} \int_0^{h_\varepsilon(t,x)} v_{1\varepsilon}(t,x,z) dz.$$

Grâce à (II.8), on voit que \bar{u}_ε est une bonne approximation de $v_{1\varepsilon}$. Toujours grâce à (II.8), on peut vérifier que

$$\bar{u}_\varepsilon^2(t, x) = \frac{1}{h_\varepsilon(t, x)} \int_0^{h_\varepsilon(t, x)} (v_{1\varepsilon}(t, x, z))^2 dz + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Tout d'abord, remarquons que l'équation de conservation du volume (II.5) se réécrit

$$\partial_t h_\varepsilon + \partial_x (h_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon) = 0. \quad (\text{II.10})$$

Passons maintenant à l'équation sur la vitesse moyenne \bar{u}_ε . On suppose dans la suite que la viscosité et la friction sont d'ordre ε

$$\alpha = \varepsilon \alpha_0, \quad \mu = \varepsilon \mu_0, \quad \varepsilon \text{Re} = \text{Re}_0$$

ce qui permet de déduire de (II.9) que $p_\varepsilon(t, x, z) = (h_\varepsilon(t, x) - z)/\text{Fr}^2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Si on reprend l'équation (II.7), écrite pour les variables de l'approximation, on aboutit à

$$\partial_t (h_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon) + \partial_x (h_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon^2) + \partial_x \frac{(h_\varepsilon)^2}{2\text{Fr}^2} = -\alpha_0 \bar{u}_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{II.11})$$

où on a utilisé (II.8) pour le second membre.

1.5 Équations de Saint-Venant

Si on reprend les équations (II.10) et (II.11), on peut remarquer qu'elles forment un système fermé ! Pour revenir aux variables initiales, on multiplie la première équation par HU/L et la seconde par HU^2/L , ce qui donne les équations dites de Saint-Venant [SV71] avec friction

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x (hu) &= 0, \\ \partial_t (hu) + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) &= -\kappa u, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

où

$$u(t, x) = \frac{1}{h(t, x)} \int_0^{h(t, x)} v_1(t, x, z) dz.$$

On peut donc affirmer que les solutions des équations de Navier-Stokes (II.1)-(II.2) vérifient les équations (II.12) à ε près.

D'une manière générale, la dérivation des équations peut intégrer un fond non plat (mais d'amplitude ε et de faible pente) [EX], une deuxième coordonnée horizontale [EX], la force de Coriolis, des frottements plus complexes... voir par exemple [GP01, Mar07]. Dans la plupart des cas, la dérivation peut même être justifiée mathématiquement [Nob09].

2 Équations de Saint-Venant avec topographie et friction

On présente maintenant les équations de Saint-Venant en deux dimensions (horizontales), avec prise en compte de la topographie et de la friction,

$$\begin{aligned} \partial_t h + \text{div}(h\mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (h\mathbf{u}) + \text{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla(gh^2/2) &= -gh\nabla b - \mathbf{f}(h, h\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

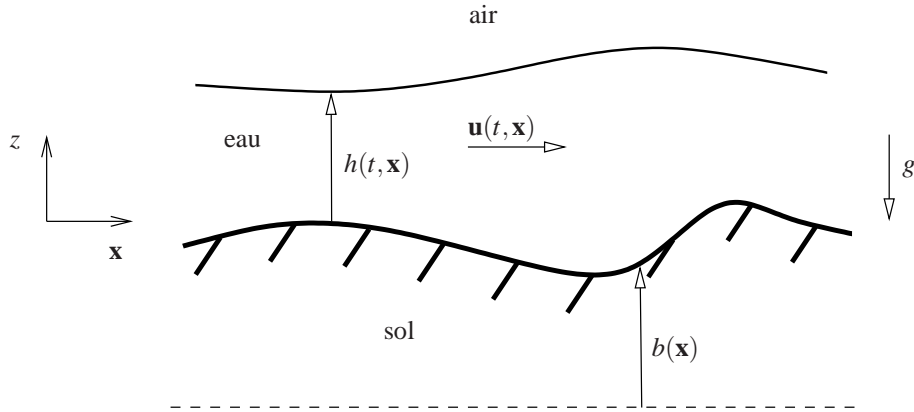


FIGURE II.2 – Représentation d’un écoulement à surface libre avec un fond non plat

où h est la hauteur d’eau et $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ la vitesse horizontale moyenne sur une colonne d’eau, toutes deux dépendant de t et $\mathbf{x} = (x, y)$, g la constante de la gravité, b l’altitude du sol qui dépend de manière régulière de \mathbf{x} , et \mathbf{f} la friction. La friction \mathbf{f} est une fonction allant de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2 vérifiant

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{S}^1, \forall (h, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \quad \text{sgn}(h\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \text{sgn}(\mathbf{f}(h, h\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})$$

où \mathbb{S}^1 est la sphère unité de \mathbb{R}^2 et la fonction signe vérifie $\text{sgn}(0) = 0$. Cette hypothèse assure que la friction est bien une force allant dans le sens opposé à celui du déplacement du fluide. Quelques exemples classiques : $\mathbf{f} = \kappa h \mathbf{u}$ (frottement laminaire), $\mathbf{f} = \kappa \mathbf{u} |\mathbf{u}|$ (frottement turbulent de Darcy-Weisbach), $\mathbf{f} = \kappa h^{-1/3} \mathbf{u} |\mathbf{u}|$ (frottement turbulent de Manning) — à noter que pour les deux derniers types de frottement, il est nécessaire de poser comme convention que $h = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ pour vérifier l’hypothèse du signe. Ces lois sont le plus souvent empiriques, c’est-à-dire qu’elles sont déduites de configurations simplifiées et de mesures expérimentales (voir par exemple le livre très instructif sur les équations de Saint-Venant [Sto92]).

Ce système possède une énergie **[EX]**, qui est une entropie mathématique, qui vérifie l’inégalité

$$E := h \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + g \frac{h^2}{2} + ghb, \quad (\text{II.14})$$

$$\partial_t E + \text{div}(h\mathbf{u}(|\mathbf{u}|^2/2 + g(h+b))) = \partial_t E + \text{div}(\mathbf{u}(E + gh^2/2)) \leq 0.$$

Le fait que ce soit une inégalité provient de la friction, car $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \leq 0$. Si $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$, alors (II.14) est une égalité pour les solutions régulières de (II.13) et devient l’inégalité pour les solutions faibles (E est convexe par rapport à h et $h\mathbf{u}$ **[EX]**). On peut d’ailleurs faire une analogie directe avec les équations d’Euler isentropique en identifiant h à ρ et en définissant la pression $p(\rho) = g\rho^2/2$; l’inéquation (II.14) est bien celle de l’énergie classique. Pour terminer, un peu de vocabulaire :

- la vitesse des *ondes de gravité* est $c = \sqrt{gh}$ (analogue de la vitesse du son des équations d’Euler),
- si $|\mathbf{u}| \ll c$ (respectivement $|\mathbf{u}| \gg c$), on est en régime *subcritique* ou *fluvial* (resp. *supercritique* ou *torrentiel*), et si $|\mathbf{u}| \simeq c$, on est en régime *transcritique*,

- un choc stationnaire entropique est appelé *ressaut hydraulique*, voir la figure II.3 pour un exemple ([EX] Déterminer la zone torrentielle et la zone fluviale).



FIGURE II.3 – Exemple de ressaut hydraulique

On va maintenant s'intéresser à quelques solutions de ce système, étant entendu que l'analyse du cas homogène ($\nabla b \equiv \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$) est « classique », puisqu'elle revient à celle d'Euler isentropique avec le coefficient adiabatique $\gamma = 2$.

Dans la suite, on utilisera les notations vectorielles :

$$\partial_t U + \operatorname{div} F(U) = S_b(U, \mathbf{x}) + S_f(U)$$

où $U \in \Omega := \{h \geq 0, hu \in \mathbb{R}\}$.

Concernant le caractère bien posé des équations de Saint-Venant, il y a comme toujours (au moins) deux axes d'étude, selon la présence ou l'absence de viscosité dans le système. Ainsi, pour le premier cas, on peut se référer au récent article [Has10] (voir aussi les références qu'il contient). Pour le cas non visqueux, voir l'article, et ses références, [DP09]. Ce ne sont bien sûr que deux articles parmi de nombreux autres...

2.1 Solutions stationnaires

On étudie ici quelques solutions stationnaires — aussi dénommées états d'équilibre, par analogie avec les systèmes dynamiques — qui vérifient donc le système

$$\operatorname{div} F(U) = S_b(U, \mathbf{x}) + S_f(U) \quad (\text{II.15})$$

au sens des distributions, auquel on adjoint l'inégalité d'entropie

$$\operatorname{div}(u(E + gh^2/2)) \leq 0.$$

Dans le *cas homogène*, il est connu que les solutions stationnaires sont composées d'*états constants* séparés par des *chocs stationnaires entropiques*. En présence de termes source, c'est un peu plus compliqué, même si les chocs stationnaires entropiques (les mêmes que ceux du cas homogène) sont admissibles. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la dérivation des relations de saut de Rankine-Hugoniot et de vérifier que la présence de termes sources réguliers ne les modifient pas [EX]. Ainsi, on va regarder dans la suite les solutions stationnaires *régulières*, ce qui permettra de construire ensuite, si possible, des solutions stationnaires régulières par morceaux en utilisant des chocs stationnaires entropiques.

2.1.1 Lac au repos

Le premier cas consiste à regarder les solutions de (II.15) dont la quantité de mouvement est identiquement nulle : $h\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. La première équation est trivialement vérifiée et la seconde donne pour les solutions régulières :

$$h\nabla h = h\nabla b.$$

Deux cas se présentent : soit $h \equiv 0$, c'est-à-dire qu'on est sur une zone sèche, soit $\nabla(h+b) = 0$, c'est-à-dire que la surface de l'eau est constante. De plus, il n'existe pas de choc stationnaire dont un des états a une vitesse nulle. On obtient alors la caractérisation suivante :

$$h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } \begin{cases} \text{ou } h = 0 \\ \text{ou } \nabla(h+b) = 0 \end{cases}, \quad (\text{II.16})$$

$$h\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}.$$

Ce type de solutions stationnaires correspond par exemple à des lacs au repos (c'est d'ailleurs souvent comme cela qu'ils sont nommés), voir figure II.4. Ces états sont

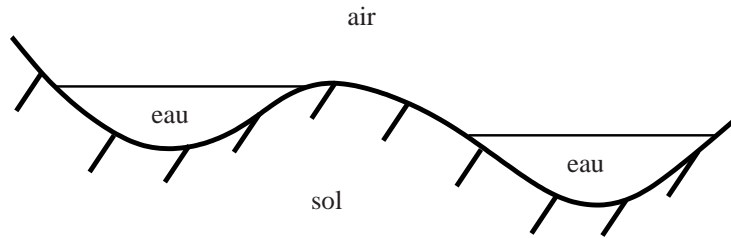


FIGURE II.4 – Représentation d'un état stationnaire de type lac au repos

d'un intérêt crucial. En effet, ils apparaissent bien souvent dans les études industrielles comme données initiales (pour le lac d'un barrage hydroélectrique par exemple) ou comme état obtenu en temps long (zones inondées après une crue).

2.1.2 Équilibre sans friction : théorème de Bernoulli

On se place maintenant dans le cas où la quantité de mouvement n'est plus nulle et où la *friction est nulle*. On obtient après quelques calculs simples que les solutions stationnaires régulières vérifient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(h\mathbf{u}) &= 0, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla(h+b) &= 0. \end{aligned}$$

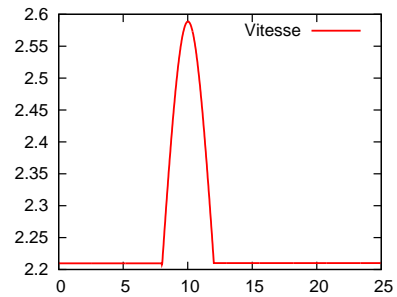
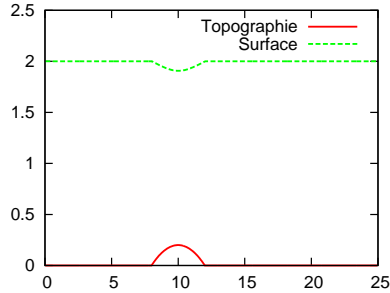
En une dimension d'espace, la deuxième équation s'écrit

$$\partial_x(u^2/2 + g(h+b)) = 0,$$

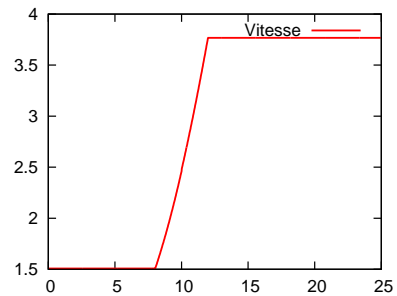
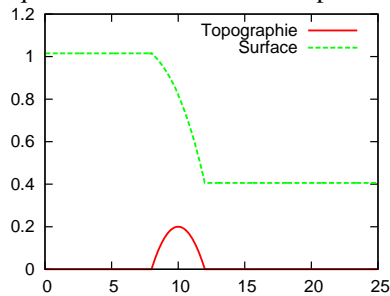
qui est exactement le *théorème de Bernoulli* (que l'on peut aussi formuler en 2D le long des lignes de courant), où la pression est la pression hydrostatique $P = gh$.

Pour illustrer ces calculs, voici quelques solutions stationnaires pour les équations de Saint-Venant 1D avec topographie et sans friction :

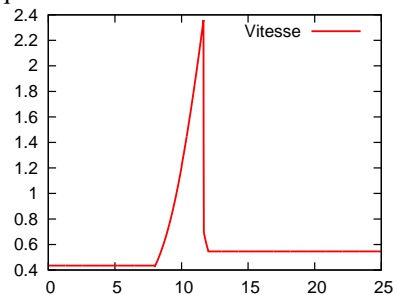
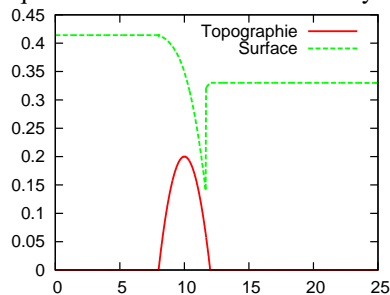
– équilibre de Bernoulli fluvial



– équilibre de Bernoulli fluvial puis torrentiel



– équilibre de Bernoulli et ressaut hydraulique



Ce type d'équilibre peut s'étudier assez précisément, voir par exemple [CLS04]. En général, ce type d'écoulements intervient dans les solutions obtenus en temps long. Leur apparition (autrement dit les conditions d'existence de telles solutions) dépend fortement des conditions aux limites ; par exemple, les trois profils ci-dessus sont tous obtenus comme solutions en temps long à partir de la même donnée initiale.

2.2 Solutions particulières

On présente maintenant quelques solutions instationnaires des équations de Saint-Venant, en une dimension d'espace.

2.2.1 Roll waves

Les *roll waves* sont des solutions périodiques qui se déplacent à vitesse constante. Elles ne peuvent apparaître que dans des conditions bien précises, mais sont cependant très stables une fois ces conditions remplies. Elle se compose d'une partie régulière et d'un choc, les deux se déplaçant à la même vitesse [Dre49, JK00, Nob09] (un exemple de simulation de roll waves est représenté figure II.5).

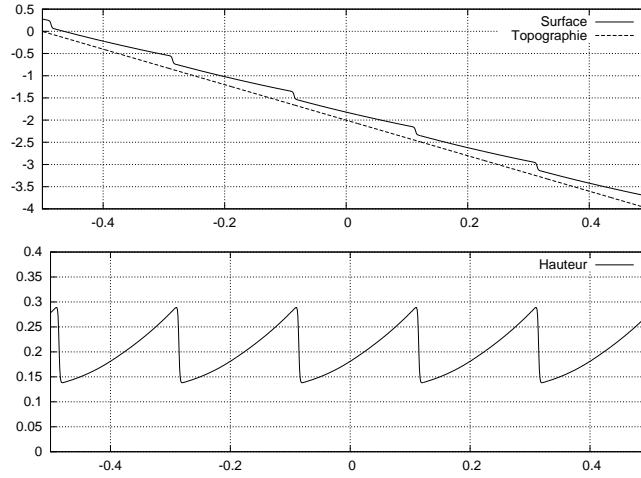


FIGURE II.5 – Simulation de roll waves

2.2.2 Écoulements à friction dominante

Dans le cas d'une rupture de barrage, une vague submerge de nombreuses portions en aval, habituellement sèches. Au lieu de prendre en compte le détail de ces zones lors de la simulation, on peut modéliser leur influence par des termes additionnels ou bien des modifications de termes existants. En particulier, dans le cas d'une forêt, cela peut être fait en augmentant fortement le coefficient de friction. On va voir que cela peut générer un comportement transitoire bien particulier.

On s'intéresse au système 1D (on pourrait faire de même en 2D)

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) &= -ghb'(x) - \kappa hu \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

(on aurait pu prendre d'autres type de lois de friction et on utilisera dans la suite la pente s , i.e. $s(x) = b'(x)$). On note $T, L, H, S = H/L$ et $U = L/T$ les grandeurs caractéristiques du système (temps, longueur, hauteur d'eau, pente et vitesse). Comme κ est homogène à une fréquence, on introduit κ_0 , coefficient de friction sans dimension, tel que $\kappa = \kappa_0/T$. Ainsi, si le $\tilde{\cdot}$ représente les variables adimensionnées, le système devient **[EX]**

$$\begin{aligned} \frac{H}{T} [\partial_{\tilde{t}} \tilde{h} + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{h}\tilde{u})] &= 0, \\ \frac{HL}{T^2} \left[\partial_{\tilde{t}}(\tilde{h}\tilde{u}) + \partial_{\tilde{x}}(\tilde{h}\tilde{u}^2) + \frac{1}{\text{Fr}^2} \partial_{\tilde{x}}(\tilde{h}^2/2) \right] &= -\frac{1}{\text{Fr}^2} \frac{HL}{T^2} \tilde{h}\tilde{s} - \frac{HL}{T^2} \kappa_0 \tilde{h}\tilde{u} \end{aligned}$$

où $\text{Fr} = U/\sqrt{gH}$ est le nombre de Froude. Dire que la friction est dominante signifie que le coefficient de friction adimensionné κ_0 est très grand devant toutes les autres dimensions. Ici, cela donne, en divisant la deuxième équation par κ_0 , $\tilde{u} = \mathcal{O}(1/\kappa_0)$. De plus, le temps caractéristique associé à la friction est T/κ_0 , qui est très petit devant le temps caractéristique de l'écoulement T . Ces deux constatations nous incitent à redéfinir les adimensionnements de la vitesse et du temps :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\kappa_0 T} \quad \text{et} \quad \tilde{u} = \frac{\kappa_0 u}{U}, \quad (\text{II.18})$$

ce qui est bien compatible avec la relation $U = L/T$. Le système devient alors

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{H}{\kappa_0 T} [\partial_t \tilde{h} + \partial_x(\tilde{h}\tilde{u})] = 0, \\ \frac{HL}{(\kappa_0 T)^2} \left[\partial_t(\tilde{h}\tilde{u}) + \partial_x(\tilde{h}\tilde{u}^2) + \frac{\kappa_0^2}{F_r^2} \partial_x(\tilde{h}^2/2) \right] = -\frac{1}{F_r^2} \frac{HL}{T^2} \tilde{h}\tilde{s} - \frac{HL}{T^2} \tilde{h}\tilde{u}, \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} \partial_t \tilde{h} + \partial_x(\tilde{h}\tilde{u}) = 0, \\ \partial_x(\tilde{h}^2/2) = -\tilde{h}\tilde{s} - F_r^2 \tilde{h}\tilde{u} + \mathcal{O}(1/\kappa_0^2), \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} F_r^2 \partial_t \tilde{h} - \partial_x(\tilde{h}\tilde{s} + \partial_x(\tilde{h}^2/2)) = \mathcal{O}(1/\kappa_0^2), \\ F_r^2 \tilde{h}\tilde{u} = -\tilde{h}\tilde{s} - \partial_x(\tilde{h}^2/2) + \mathcal{O}(1/\kappa_0^2). \end{cases} \end{aligned}$$

Le dernier système est composé d'une équation parabolique non linéaire et d'une équation liant la vitesse à la hauteur d'eau et au gradient de la hauteur d'eau. Autrement dit, la vitesse est reliée à la force extérieure due à la pente et au gradient de pression. Cette équation correspond donc à la *loi de Darcy*.

Il est important de remarquer que l'asymptotique obtenue à partir d'un *système hyperbolique avec terme source* en supposant la friction dominante est donc une *équation parabolique* (on peut regarder à nouveau [DP09] ou bien [Mei10] pour avoir d'autres détails sur cette asymptotique).

3 Méthodes numériques pour les systèmes avec terme source

On a vu que les solutions des équations de Saint-Venant (II.13) ont des comportements spécifiques, en raison de la présence des termes source. On va s'intéresser à quelques méthodes numériques, plus ou moins adaptées, tout en sachant qu'obtenir une méthode précise pour tous les solutions décrites ci-dessus est pour le moins difficile.

3.1 Splitting d'opérateur

Cette méthode (aussi appelée méthode à pas fractionnaires) est la plus simple pour prendre en compte des termes source, surtout d'un point de vue industriel, on va vite voir pourquoi. L'idée est la suivante. On considère un problème de Cauchy du type

$$\begin{cases} \partial_t W = A(W) + B(W), & t > 0, \\ W|_{t=0} = W_0, \end{cases}$$

où W_0 est la donnée initiale et A et B sont des opérateurs quelconques (éventuellement différentiels). Pour approcher ce système, on définit un pas de temps Δt et on construit la suite $(W^n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui approche $(W|_{t=n\Delta t})_{n \in \mathbb{N}}$ par le schéma itératif suivant :

$$\begin{aligned} W^{n+1/2} &= W^n + \Delta t A(W^n) \\ W^{n+1} &= W^{n+1/2} + \Delta t B(W^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Donc lors d'un pas de temps, on résout chaque opérateur séparément (avec pour pas de temps Δt). Ainsi, lorsqu'on ajoute un opérateur de plus, il suffit d'ajouter simplement

la méthode numérique associée, sans modification de ce qui existe. Cette méthode se base sur la formule de Lie-Trotter-Kato, où $t = n\Delta t$,

$$e^{t(A+B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{\Delta t A} \times e^{\Delta t B} \right]^n$$

qui exprime la convergence du splitting d'opérateur, dans sa version continue (au sens des semi-groupes notamment, voir les articles [Tro59, Kat78]).

Cette méthode est en général très efficace. En effet, le fait de pouvoir traiter opérateur par opérateur permet d'utiliser des méthodes numériques standards pour chacun et d'obtenir une méthode globale stable et consistante. Dans le cas des équations de Saint-Venant (II.17), on serait par exemple amener à définir les opérateurs

$$A = -\operatorname{div}F(U), \quad B = S_b(U, \mathbf{x}) + S_f(U) \quad (\text{II.19})$$

(on aurait aussi pu « splitter » S_b et S_f). La résolution du premier pas peut s'effectuer par un schéma Volumes Finis standard

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n)) \quad (\text{II.20})$$

et le second pas peut se résoudre à l'aide de la méthode d'Euler implicite par exemple

$$U_i^{n+1} = U_i^{n+1/2} + \Delta t B(U_i^{n+1}).$$

Le splitting d'opérateur est donc très simple à programmer et donne généralement des résultats satisfaisants. Mais pas toujours... Bien que cette méthode semble toujours converger vers la solution attendue, l'erreur de consistance peut être très grande, même si elle tend vers 0 quand $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ — c'est la fameuse constante présente dans le $\mathcal{O}(\Delta x + \Delta t)$ qui peut être pénalisante. Un exemple de cas très connu dans le cadre des équations de Saint-Venant concerne la préservation au niveau discret des états stationnaires (II.16). On introduit la classe de schémas numériques suivante :

Définition II.1. On dit qu'un schéma numérique est un schéma *équilibre* pour les états stationnaires (II.16) (*well-balanced* en anglais) s'il satisfait la propriété suivante :

$$\begin{aligned} &\text{si } \forall i, j \in \mathbb{Z}, \text{ on a } (h\mathbf{u})_i^0 = 0 \text{ et } h_i^0 + b_i = h_j^0 + b_j, \\ &\text{alors } \forall n \geq 0 \text{ et } \forall i \in \mathbb{Z}, \text{ on a } h_i^n = h_i^0 \text{ et } (h\mathbf{u})_i^n = 0. \end{aligned}$$

(On omet le cas du vide $h_i^0 = 0$ pour simplifier.)

Cette notion est valable aussi bien en 1D qu'en 2D et elle correspond bien à l'analogie discret de (II.16).

Proposition II.2. *Tout schéma issu du splitting d'opérateur (II.19) n'est pas un schéma équilibre pour les états stationnaires (II.16).*

Démonstration. On se place dans un cas d'un état stationnaire avec une topographie non constante, donc $b_i \neq b_j$, ce qui entraîne que $h_i^0 \neq h_j^0$. Par conséquent, le schéma Volumes Finis (II.19) a pour arguments des états tous différents, donc

$$h_i^{1/2} \neq h_i^0.$$

Passons au second pas. Le système à résoudre est

$$\begin{aligned} \partial_t h &= 0, \\ \partial_t h\mathbf{u} &= -gh\nabla b - \mathbf{f}(h, h\mathbf{u}). \end{aligned}$$

La discrétisation de la première équation donne $h_i^1 = h_i^{1/2} \neq h_i^0$. On en déduit donc que le schéma n'est pas équilibre. \square

3.2 Discrétisation directe du terme source

Une idée très simple est aussi de définir un schéma numérique grâce à une discrétisation du terme source directement intégrée dans le schéma numérique :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}(U_i^n, U_{i+1}^n) - \mathcal{F}(U_{i-1}^n, U_i^n)) + \Delta t \mathcal{S}(U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n; \Delta x) \quad (\text{II.21})$$

où \mathcal{S} est une discrétisation consistante du terme source. Néanmoins, on peut voir facilement que ce schéma ne préserve pas lui non plus les états d'équilibre, quel que soit \mathcal{S} . En effet, le calcul de h_i^{n+1} est le même que celui de la méthode à pas fractionnaires.

Un moyen d'éliminer cette pathologie serait d'avoir une discrétisation implicite (ou semi-implicite) en temps du terme source. Cependant, les schémas numériques de ce type peuvent s'avérer très coûteux puisqu'on perd le caractère compact du stencil.

3.3 Schémas équilibres

On voit donc qu'il est nécessaire d'avoir un schéma qui tient compte de la topographie dès le premier pas. On peut remarquer que si on sait construire un schéma équilibre pour les états stationnaires (II.16) dans le cas sans friction, alors on sait construire un schéma équilibre pour ces mêmes états dans le cas avec friction, en utilisant le splitting suivant [EX] :

$$A = -\text{div}F(U) + S_b(U, \mathbf{x}), \quad B = S_f(U).$$

Par conséquent, on va s'intéresser à la construction de schémas équilibres pour le système

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) &= -ghb'(x) \end{aligned}$$

De plus, on va supposer que la topographie est discrétisée de manière constante par mailles, par exemple grâce à la formule

$$b_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{M_i} b(x) dx$$

où $M_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ est une maille et les $x_{i+1/2}$ sont les interfaces du maillage. Une écriture générale de schémas prenant en compte le terme source est la suivante :

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{F}^-(U_i^n, U_{i+1}^n, b_{i+1} - b_i) - \mathcal{F}^+(U_{i-1}^n, U_i^n, b_i - b_{i-1})). \quad (\text{II.22})$$

Les flux numériques \mathcal{F}^- et \mathcal{F}^+ doivent vérifier les propriétés suivantes :

- conservation classique : $\mathcal{F}^-(U, V, 0) = \mathcal{F}^+(U, V, 0)$,
- consistance classique : $\mathcal{F}^-(U, U, 0) = F(U)$,
- consistance avec le terme source : $\mathcal{F}^+(U, V, S) - \mathcal{F}^-(U, V, S) \approx -ghS$.

La dernière propriété n'est pas très précise (voir par exemple [Bou04] pour une discussion autour de cette condition). Elle exprime le fait que le terme source n'agit qu'aux interfaces du maillage.

La notion de schéma équilibre introduite à la définition II.1 est une définition « par maille ». Grâce à l'écriture (II.22), on peut en déduire une condition suffisante sur le schéma pour qu'il soit équilibre, qui correspond cette fois à une caractérisation par interface.

Proposition II.3. Soit $(\bar{U}_i, \bar{b}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la discrétisation d'un état stationnaire (voir la définition II.1). Si le schéma numérique (II.22) vérifie $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{F}^-(\bar{U}_i, \bar{U}_{i+1}, \bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i) = F(U_i) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^+(\bar{U}_i, \bar{U}_{i+1}, \bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i) = F(U_{i+1}),$$

alors c'est un schéma équilibre pour les états stationnaires (II.16).

Démonstration. [EX] □

La question est maintenant d'arriver à construire un schéma équilibre. Ce n'est pas évident et des articles dans lesquels sont proposés de nouveaux schémas équilibres sont publiés encore actuellement ! Nous allons voir quelques exemples.

3.3.1 Schémas de type Godunov

L'idée de ces schémas est de se baser sur le formalisme du schéma de Godunov. Introduisons tout d'abord la topographie discrétisée

$$b_\Delta(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i \mathbf{1}_{M_i}(x).$$

On remplace b par b_Δ dans le système (II.17) et on intègre sur $(n\Delta t, (n+1)\Delta t) \times M_i$, ce qui donne

$$\int_{M_i} (U((n+1)\Delta t, x) - U(n\Delta t, x)) dx + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (F(U(t, x_{i+1/2}^-)) - F(U(t, x_{i-1/2}^+))) dt = 0,$$

où $f(x_{i+1/2}^-)$ et $f(x_{i+1/2}^+)$ sont les traces à gauche et à droite de la fonction f au point $x_{i+1/2}$. Tout comme pour le schéma de Godunov dans le cas conservatif, on en déduit le schéma

$$U_i^{n+1/2} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(\mathcal{U}(0^-; U_i^n, U_{i+1}^n, b_{i+1} - b_i)) - F(\mathcal{U}(0^+; U_{i-1}^n, U_i^n, b_i - b_{i-1})))$$

où $\mathcal{U}(x/t; U_g, U_d, b_d - b_g)$ est la solution (exacte ou approchée) du problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(b_d - b_g) \delta_0(x) \end{pmatrix}, \\ U(0, x) = \begin{cases} U_g & \text{si } x < 0, \\ U_d & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

On reviendra un peu plus tard sur la résolution de ce problème. Pour peu que la solution de ce problème de Riemann existe, on obtient alors la forme des flux numériques de l'écriture (II.22) :

$$F^\pm(U, V, S) = F(\mathcal{U}(0^\pm; U, V, S)). \quad (\text{II.24})$$

On en déduit donc la

Proposition II.4. Si le solveur de Riemann \mathcal{U} satisfait la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } U_1, U_2 \text{ et } S \text{ vérifient } h_1 = h_2 + S \text{ et } u_1 = u_2 = 0, \\ \text{alors } \mathcal{U}(0^-; U_1, U_2, S) = U_1 \text{ et } \mathcal{U}(0^+; U_1, U_2, S) = U_2, \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

alors le schéma (II.22)-(II.24) est un schéma équilibre pour les états stationnaires (II.16).

Démonstration. [EX] □

En fait, la propriété (II.25) signifie que si la donnée initiale du problème de Riemann (II.23) correspond à un état stationnaire de type (II.16), alors la solution du problème de Riemann est stationnaire, c'est-à-dire

$$\mathcal{U}(\xi; U_1, U_2, S) = \begin{cases} U_1 & \text{si } \xi < 0, \\ U_2 & \text{si } \xi > 0. \end{cases} \quad \text{[EX]}$$

Solveur de Riemann linéarisé Construisons pour commencer un solveur approché du problème de Riemann (II.23). Soit $\mathcal{U}_{\text{app}}(x/t; U_g, U_d, b_d - b_g)$ la solution exacte du problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t U + F'(U_0) \partial_x U = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(b_d - b_g) \delta_0(x) \end{pmatrix}, \\ U(0, x) = \begin{cases} U_g & \text{si } x < 0, \\ U_d & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad \text{(II.26)}$$

où $U_0 = (U_g + U_d)/2$ et

$$F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{pmatrix}.$$

On résout donc une linéarisation du problème de Riemann. Comme ce problème est linéaire, on peut le résoudre explicitement et montrer que \mathcal{U}_{app} vérifie bien la propriété (II.25) (voir [GHS03] pour plus de détails sur ce type de schémas numériques) [EX].

Solveur de Riemann exact Dans (II.23), on peut assimiler b_Δ à une inconnue du problème, ce qui donne le système

$$\begin{aligned} \partial_t b_\Delta &= 0, \\ \partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x b_\Delta &= 0. \end{aligned} \quad \text{(II.27)}$$

Ce système admet pour valeurs propres $\lambda_\pm = u \pm \sqrt{gh}$ (associées à des champs vraiment non linéaires) et $\lambda_0 = 0$ (associée à un champ linéairement dégénéré). On peut d'ores et déjà remarquer que les deux ondes de vitesse λ_- et λ_+ ne sont pas ordonnées a priori avec l'onde stationnaire associée à la valeur propre λ_0 . Il se pose de plus la question de leur caractérisation lorsque que l'une d'elles se superpose avec l'onde stationnaire.

Proposition II.5. *Si $|u| \neq \sqrt{gh}$ alors le système (II.27) est strictement hyperbolique. Sinon, deux de ses valeurs propres s'identifient ainsi que les vecteurs propres associés. On dit alors que le système est résonnant.*

Démonstration. Le système (II.27) peut se réécrire

$$\partial_t \begin{pmatrix} b_\Delta \\ h \\ hu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ gh & gh - u^2 & 2u \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} b_\Delta \\ h \\ hu \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Après calculs, les vecteurs propres sont

$$r_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \pm \sqrt{gh} \end{pmatrix} \text{ et } r_0 = \begin{pmatrix} gh - u^2 \\ -gh \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conclut la démonstration. \square

En cas de résonance, on en déduit que les vecteurs propres ne forment plus une base de \mathbb{R}^3 . En fait, c'est un des cas pour lesquels l'analogie avec le cas linéaire ne peut plus être faite lors de l'étude du problème de Riemann.

Un autre problème du système (II.27) est qu'il est non conservatif. En effet, le terme $gh\partial_x b_{\Delta}$ est un produit de distribution, non défini donc. On pourrait cependant objecter le résultat suivant :

Proposition II.6. *Soit un système strictement hyperbolique non conservatif et supposons qu'il admette un champ linéairement dégénéré. Alors l'onde associée est une discontinuité de contact et tout invariant de Riemann associé à cette onde est constant à travers cette onde.*

Ce résultat assure que pour un champ LD (comme l'onde stationnaire ici) le fait que le système soit non conservatif ne modifie pas sa caractérisation habituelle (ce qui n'est pas le cas pour un champ VNL). Pour le système (II.27), les invariants de Riemann de l'onde stationnaire sont

$$I_0^1(U) = hu \quad \text{et} \quad I_0^2(U, b) = \frac{u^2}{2} + g(h + b)$$

(à comparer avec les états stationnaires du théorème de Bernoulli...).

Au moins dans le cas *sans résonance*, on peut proposer une méthode de résolution du problème de Riemann. Définissons les ensembles

$$\mathcal{T}_-(U_g) = \{\mathcal{U}(0^-; U_g, U, 0), U \in \Omega\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_+(U_d) = \{\mathcal{U}(0^+; U, U_d, 0), U \in \Omega\}$$

où $\mathcal{U}(x/t; U, V, 0)$ est la solution exacte du problème de Riemann associé aux équations de Saint-Venant sans topographie. Ainsi, $\mathcal{T}_-(U_g)$ (respectivement $\mathcal{T}_+(U_d)$) est l'ensemble des états qu'on peut atteindre en $x/t = 0^-$ (resp. $x/t = 0^+$) à travers des ondes de vitesse négative (resp. positive) à partir de U_g (resp. U_d). Comme le fond est plat pour $x/t < 0$ et $x/t > 0$, résoudre le problème de Riemann (II.23) revient à chercher deux états $U_-, U_+ \in \Omega$ vérifiant

$$\begin{cases} U_- \in \mathcal{T}_-(U_g) \\ U_+ \in \mathcal{T}_+(U_d) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} I_0^1(U_-) = I_0^1(U_+) \\ I_0^2(U_-, b_g) = I_0^2(U_+, b_d) \end{cases} . \quad (\text{II.28})$$

On ne discutera pas ici de l'existence et de l'unicité de U_- et U_+ , le lecteur intéressé pourra se reporter aux références [IT92, IT95, LeR99, Asa97, GL04, CLS04]. Néanmoins, on peut vérifier le résultat qui nous intéresse :

Proposition II.7. *Le solveur de Riemann exact \mathcal{U} basé sur la résolution de (II.28) vérifie la propriété (II.25). Le schéma associé est donc un schéma équilibré.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathcal{U}(\xi, U_1, U_2, S) = U_1 \mathbf{1}_{\xi < 0} + U_2 \mathbf{1}_{\xi > 0}$ vérifie bien les relations (II.28). Il est d'une par évident que pour tout $U_1, U_2 \in \Omega, U_1 \in \mathcal{T}_-(U_1)$

et $U_2 \in \mathcal{T}_+(U_2)$. De plus, si U_1, U_2 et S vérifient $h_1 = h_2 + S$ et $u_1 = u_2 = 0$, on a bien que

$$I_0^1(U_2) = I_0^1(U_2) = 0$$

et que

$$\frac{u_1^2}{2} + gh_1 = \frac{u_2^2}{2} + gh_2 + gS,$$

donc que $I_0^2(U_1, \beta) = I_0^2(U_2, \beta + S)$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. □

Il existe d'autres solveurs de Riemann approchés permettant d'obtenir des schémas équilibres. On peut penser par exemple à construire des schémas de type HLL incluant l'onde stationnaire, ou à utiliser d'autres linéarisations que (II.26).

3.3.2 Schémas avec reconstruction

Oublions un instant les équilibres de type (II.16) et supposons que les équilibres que l'on désire préserver puissent être définis à partir de deux fonctions Ψ_- et Ψ_+ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont à l'équilibre} &\iff U_1 = \Psi_-(U_2, S) \\ &\iff U_2 = \Psi_+(U_1, S). \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Alors on peut construire un schéma équilibre très simplement [GL96b, GL96a].

Proposition II.8. *Soit le schéma (II.22) dont les flux numériques sont définis par*

$$\mathcal{F}^-(U, V, S) = \mathcal{F}(U, \Psi_-(V, S)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^+(U, V, S) = \mathcal{F}(\Psi_+(U, S), V),$$

où \mathcal{F} est un flux numérique consistant avec les équations de Saint-Venant sans topographie. Alors, ce schéma est un schéma équilibre.

Démonstration. Si U et V sont à l'équilibre, alors $U = \Psi_-(V, S)$. On en déduit que

$$\mathcal{F}^-(U, V, S) = \mathcal{F}(U, \Psi_-(V, S)) = \mathcal{F}(U, U) = F(U).$$

De même, on obtient

$$\mathcal{F}^+(U, V, S) = \mathcal{F}(\Psi_+(U, S), V) = \mathcal{F}(V, V) = F(V).$$

On conclut en utilisant la proposition II.3. □

Malheureusement, pour les états stationnaires de type (II.16), il n'existe pas de fonctions Ψ_{\pm} vérifiant la propriété (II.29). En effet, essayons de construire la fonction Ψ_- par exemple : le sens \implies dans (II.29) nous impose

$$\Psi_-(U_2, S) = \begin{pmatrix} h_2 + S \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.30})$$

Mais la réciproque dans (II.29) n'est pas vraie, puisqu'il faudrait en plus imposer que $u_2 = 0$. Attention, car si on regarde la démonstration ci-dessus, on utilise que le sens \implies de la propriété (II.29) donc avec la fonction Ψ_- (et son analogue Ψ_+), on pourrait définir un schéma équilibre. Cependant, ce schéma ne vérifierait pas la propriété (inévitabile) de consistance classique mentionnée plus haut : $\mathcal{F}^-(U, U, 0) = F(U)$.

On peut tout de même modifier le schéma numérique de la proposition II.8 pour qu'il fonctionne, mais on ne va pas le détailler ici, on revoie à [ABB⁺04].

3.4 Schémas préservant l'asymptotique

On va maintenant étudier la possibilité de construire un schéma numérique permettant d'approcher correctement les écoulements à friction dominante. Ce que cela signifie est que la précision du schéma ne doit pas être dépendante de la friction. C'est assez dur à quantifier et les démonstrations ne sont basées en général que sur des analyses de type différences finies, comme on va le voir par la suite.

Pour simplifier les calculs, on va restreindre la présentation à l'équation des ondes linéaire avec amortissement. Celle-ci correspond aux équations de Saint-Venant sans topographie avec une pression et une friction linéaires en coordonnées lagrangiennes ($D_t = \partial_t + u\partial_x$, $h\partial_m = \partial_x$ et $r = 1/h$). On regarde donc le système

$$\begin{aligned} D_t r + \partial_m u &= 0, \\ D_t u + \partial_m r &= -\kappa u. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

L'asymptotique à laquelle on s'intéresse apparaît après avoir introduit $s = t/\kappa$ et $v = \kappa u$, à la manière de (II.18). À $\mathcal{O}(\kappa^{-1})$ près, on a

$$\begin{aligned} v &= -\partial_m r, \\ D_s r - \partial_{mm}^2 r &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Du point de vue du schéma numérique, on va faire l'analyse dans le cas d'un schéma semi-discret (continue en temps) pour simplifier les notations mais tout fonctionne de la même manière dans le cas totalement discret. Le schéma que l'on va d'abord étudier est correspond au schéma de Godunov pour la partie EDP avec un terme source centré (celui-ci pourrait être interprété comme la version continue en temps du splitting...). Cela donne **[EX]**

$$\begin{aligned} D_t r_i + \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta m} &= 0, \\ D_t u_i + \frac{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}}{\Delta m} &= -\kappa u_i, \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

où

$$\begin{aligned} r_{i+1/2} &= (r_i + r_{i+1})/2 - (u_{i+1} - u_i)/2, \\ u_{i+1/2} &= (u_i + u_{i+1})/2 - (r_{i+1} - r_i)/2. \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Pour alléger un peu les notations, on introduit $D_i(z) = (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1})/(\Delta m^2)$ et donc le schéma numérique s'écrit

$$\begin{aligned} D_t r_i + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta m} - \frac{\Delta m}{2} D_i(r) &= 0, \\ D_t u_i + \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2\Delta m} - \frac{\Delta m}{2} D_i(u) &= -\kappa u_i. \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Appliquons maintenant l'asymptotique au schéma numérique. On définit naturellement $v_{i+1/2} = \kappa u_{i+1/2}$ et $v_i = \kappa u_i$:

$$\begin{aligned} D_s r_i + \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta m} - \frac{\kappa \Delta m}{2} D_i(r) &= 0, \\ \frac{1}{\kappa^2} D_s v_i + \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2\Delta m} - \frac{\Delta m}{2\kappa} D_i(v) &= -v_i. \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

La deuxième équation nous donne une discrétisation de la loi de Darcy

$$v_i = -\frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2\Delta m} + \mathcal{O}(\Delta m \kappa^{-1}) + \mathcal{O}(\kappa^{-2})$$

et la première équation devient une approximation de l'équation de la chaleur

$$D_s r_i - \frac{r_{i+2} - 2r_i + r_{i-2}}{(2\Delta m)^2} - \frac{\kappa \Delta m}{2} D_i(r) + \mathcal{O}(\kappa^{-1}) + \mathcal{O}(\Delta m^{-1} \kappa^{-2}) = 0. \quad (\text{II.37})$$

Étudions plus précisément le schéma numérique obtenu par cette asymptotique. Pour que le schéma limite soit bien une approximation de (II.32), il faut que

$$\kappa^{-2} \ll \Delta m \ll \kappa^{-1}.$$

Cette condition relie le pas d'espace et le coefficient de friction. Elle n'est pas satisfaisante en pratique puisqu'on désire en général obtenir un schéma numérique ayant une précision comparable à pas d'espace fixé quelle que soit la friction. On voit en particulier dans (II.37) que plus le coefficient est grand, plus la diffusion numérique est grande.

Pour remédier à ce problème on va de nouveau intégrer le terme source dans le calcul des flux numériques. On opère de la même manière que pour les schémas équilibrés de type Godunov (section 3.3.1) en concentrant le terme source au niveau des interfaces. Pour cela, on introduit la fonction identité $\mathbf{I}(x) = x$ et on interprète le terme source de friction comme $\kappa u \mathbf{I}(x)$. Tout comme on avait remplacé la topographie b par sa discrétisation b_Δ , on remplace \mathbf{I} par \mathbf{I}_Δ , sa discrétisation constante par maille. On doit donc résoudre le problème de Riemann

$$\begin{cases} D_t r + \partial_m u = 0, \\ D_t u + \partial_m r = -\kappa u \Delta m \delta_0(x), \\ (r, u)(0, x) = \begin{cases} (r, u)_g & \text{si } x < 0, \\ (r, u)_d & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Après quelques calculs [EX], on aboutit au schéma numérique

$$\begin{aligned} D_t r_i + \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta m} &= 0, \\ D_t u_i + \frac{r_{i+1/2}^- - r_{i-1/2}^+}{\Delta m} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

où, en notant $K = 1/(1 + \kappa \Delta m/2)$, les valeurs d'interface sont

$$\begin{aligned} (1 + \kappa \Delta m/2) u_{i+1/2} &= [(u_i + u_{i+1})/2 - (r_{i+1} - r_i)/2], \\ r_{i+1/2}^- &= r_i - u_{i+1/2} + u_i, \\ r_{i-1/2}^+ &= r_i - u_i + u_{i-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

On définit $v_{i+1/2} = \kappa u_{i+1/2}$ et $v_i = \kappa u_i$, donc

$$\begin{aligned} v_{i+1/2} &= \frac{\kappa}{1 + \kappa \Delta m/2} [(v_i + v_{i+1})/(2\kappa) - (r_{i+1} - r_i)/2] \\ &= \frac{1}{1 + \kappa \Delta m/2} (v_i + v_{i+1})/2 - \frac{\kappa}{1 + \kappa \Delta m/2} (r_{i+1} - r_i)/2 \\ &= \frac{1}{1 + \kappa \Delta m/2} (v_i + v_{i+1})/2 - \left(1 - \frac{1}{1 + \kappa \Delta m/2}\right) (r_{i+1} - r_i)/\Delta m \\ &= -(r_{i+1} - r_i)/\Delta m + \mathcal{O}((\kappa \Delta m)^{-1}) \end{aligned}$$

On peut donc déduire le schéma numérique asymptotique :

$$D_s r_i - D_i(r) = \mathcal{O}(\kappa^{-1}),$$

$$v_{i+1/2} = -(r_{i+1} - r_i)/\Delta m + \mathcal{O}((\kappa \Delta m)^{-1}).$$

On voit que ce schéma est précis même pour $\kappa \gg 1$. De plus, si $\kappa = 0$, on retombe sur le schéma de Godunov classique [EX]. On dit alors que ce schéma numérique préserve l'asymptotique (II.32) (*asymptotic preserving* en anglais).

Comme on l'a dit plus haut, ce type de schéma peut être développé pour le modèle complet (II.17). Pour illustrer le propos ci-dessus, on présente dans les figures II.6 et II.7 des résultats obtenus pour les équations d'Euler avec friction et gravité (la gravité étant dans la direction de l'écoulement cette fois), avec le schéma préservant l'asymptotique et la méthode de splitting d'opérateur, voir [CCG⁺10]. Ces figures représentent des tests avec un coefficient de friction très grand et permettent d'étudier la sensibilité à la finesse du maillage des deux méthodes numériques. On voit nettement qu'un maillage très fin (10000 mailles) est nécessaire pour la méthode de splitting pour avoir des résultats comparables au schéma préservant l'asymptotique sur maillage grossier.

Par ailleurs, on pourra retrouver dans [JL96] des discussions très intéressantes et les prémices de la notion de schéma préservant l'asymptotique.

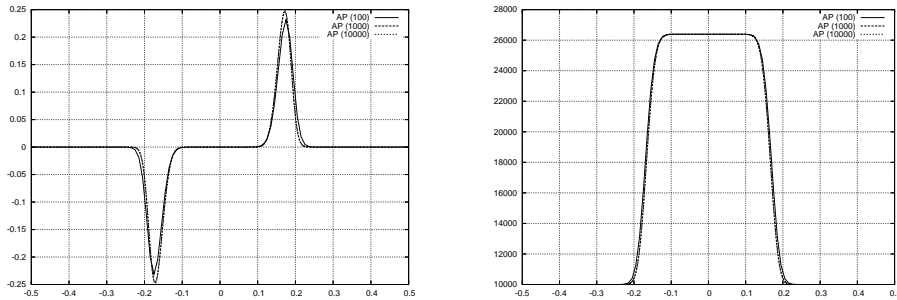


FIGURE II.6 – Résultats avec le schéma préservant l'asymptotique

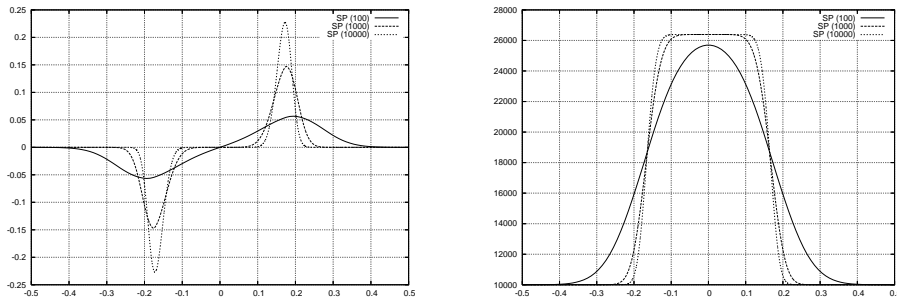


FIGURE II.7 – Résultats de la méthode de splitting d'opérateur

3.5 Pour aller plus loin...

Nous allons évoquer brièvement les extensions possibles, ou non, des schémas présentés à des configurations plus complexes.

3.5.1 Passage au 2D

La première généralisation des questions précédentes concerne le passage au 2D. Pour la problématique des schémas équilibres, la généralisation est standard, quel que soit le type de maillage considéré. Le calcul est standard, ce qui est en grande partie due au fait que les états stationnaires (II.16) sont très simples et à vitesse nulle.

Concernant l'asymptotique, le développement pour obtenir le modèle parabolique avec une loi de Darcy reste valable. D'un point de vue numérique, c'est plus compliqué. Il est possible d'étendre l'analyse présentée dans le cas de maillage cartésiens mais, dans le cas de maillages non structurés, la question reste ouverte : il est maintenant à peu près clair que le schéma « limite » basé sur celui introduit ici n'est pas consistant avec le bon système. Des techniques plus évoluées doivent alors être utilisées pour obtenir à nouveau un bon comportement.

3.5.2 Termes sources plus compliqués

Dans le cas du terme source dû à la topographie, on peut imaginer le cas d'un fond variable en temps, par exemple quand on prend en compte un transport de sédiments. Mais comme le fond varie en temps, la notion d'état stationnaire n'a plus vraiment d'intérêt. Néanmoins, les schémas équilibres ont des comportements bien souvent meilleurs que les schémas standards (splitting ou discrétisation directe) dans les configurations transitoires. Il est donc naturel de se baser sur ces schémas pour proposer des extensions à des termes sources plus compliqués.

Des termes de friction plus compliqués (Darcy-Weisbach ou Manning notamment) peuvent être pris en compte de la même manière, mais la vitesse $u_{i+1/2}$ dans (II.39) peut n'être définie qu'implicitement (et donc nécessiter une résolution itérative).

Il est important de noter que pour le schéma (II.38-II.39), le terme source a été concentré aux interfaces, en coordonnées *lagrangiennes*. Cela signifie qu'en coordonnées *eulériennes*, il aurait été concentré sur une discontinuité de contact additionnelle de vitesse u . En effet, à la lecture de [BOP07], on peut se rendre compte que concentrer un terme source de friction en coordonnées eulériennes sur les interfaces du maillage (donc sur des discontinuités de contact de vitesse nulle) nécessite l'introduction d'hypothèse additionnelle sur la méthode numérique pour qu'elle préserve l'asymptotique choisie. Cependant c'était le choix effectué pour le terme source de topographie dans le schéma équilibre (II.22-II.24). La raison de ce traitement différent est simple : contrairement au terme source de topographie, le terme source de friction est invariant galiléen. Il est donc naturel d'avoir une discrétisation qui soit, autant que possible, invariante galiléenne. C'est bien sûr impossible puisque le maillage est fixe, mais le solveur de Riemann « doit » l'être. Ainsi, la concentration du terme source de topographie se fait à l'aide de l'équation $\partial_t b_\Delta = 0$ alors que celle du terme source de friction se fait à l'aide de l'équation $\partial_t \mathbf{I}_\Delta + u \partial_x \mathbf{I}_\Delta = 0$.

A noter que la problématique de l'approximation des *roll waves* n'a pas été évoquée. En effet, la plupart des schémas numériques, dont le splitting d'opérateur, fournit une approximation tout-à-fait convenable de ce type de solutions.

3.5.3 Stabilité linéaire et non linéaire

La notion de stabilité n'a pas du tout été évoquée, alors que c'est évidemment un point crucial. Deux types de stabilité interviennent dans ce problème.

Positivité de la hauteur d'eau Il est courant que des zones sèches soient présentes dans les simulations numériques. La préservation de la hauteur d'eau positive (au sens large) au niveau numérique est donc très importante, car elle permet de traiter les phénomènes de recouvrement et de découverture de zones sèches. De plus, un schéma ne préservant pas la hauteur d'eau positive est non conservatif pour le volume d'eau. Pour éviter ce problème, il est nécessaire que le schéma numérique de base vérifie lui-même cette propriété, comme le schéma de Godunov ou les schémas de type HLL. Parmi tous les schémas présentés ici, seul le schéma basé sur le solveur de Riemann linéarisé possède cet inconvénient, même si en pratique il se comporte bien.

Inégalité d'entropie discrète Pour être sûr qu'un schéma numérique converge bien vers une solution faible entropique, il est nécessaire qu'il vérifie une inégalité d'entropie discrète, compatible avec (II.14). Ce n'est pas toujours le cas et il est souvent très difficile de le démontrer, même si les techniques à utiliser sont les mêmes que dans le cas homogène (analyse par demi-problème de Riemann notamment [HLvL83], voir [Bou04, CCG⁺10] pour des exemples de démonstration).

Chapitre III

Exploitation des hydrocarbures

Un modèle simple intervenant dans les écoulements de mélange diphasique (eau et huile par exemple) dans un milieu poreux est présenté ici. Son étude fait appel à des développements récents de l'analyse standard des lois de conservation.

1 Un modèle simplifié d'écoulement diphasique en milieu poreux

On étudie ici un écoulement unidimensionnel eau-huile dans un milieu poreux hétérogène. On suppose que les deux phases sont immiscibles et incompressibles et que les effets capillaires sont négligés (mais on conserve les effets de la gravité). Le modèle initial se compose de deux lois de conservation de la masse (sans échange de masse à l'interface),

$$(\varphi u \rho_e)_t + (V_e)_x = 0, \quad (\text{III.1})$$

$$(\varphi(1-u)\rho_h)_t + (V_h)_x = 0, \quad (\text{III.2})$$

où φ est la porosité du milieu (elle ne dépend que de la variable espace et elle est comprise entre 0 et 1), ρ_e et ρ_h sont des constantes positives et représentent respectivement les densités de l'eau et de l'huile, V_e et V_h sont les vitesses de filtration de chacune des phases et u est la saturation de l'eau (ces trois dernières variables dépendent du temps et de l'espace). On ajoute les deux équations suivantes, issues de la loi de Darcy généralisée à un écoulement diphasique :

$$V_e + k f_e(u)(p_x - \rho_e g) = 0, \quad (\text{III.3})$$

$$V_h + k f_h(u)(p_x - \rho_h g) = 0, \quad (\text{III.4})$$

avec k (dépendant seulement de l'espace) la perméabilité du milieu, p la pression (qui dépend du temps et de l'espace) du mélange et f_e et f_h les mobilités de l'eau et de l'huile (ce sont en fait les rapports des perméabilités relatives des phases sur les viscosités des phases). Si on introduit (III.3) dans (III.1) et (III.4) dans (III.2), on obtient le système

$$(\varphi u)_t - (k f_e(u)(p_x - \rho_e g))_x = 0, \quad (\text{III.5})$$

$$(\varphi(1-u))_t - (k f_h(u)(p_x - \rho_h g))_x = 0. \quad (\text{III.6})$$

En additionnant les équations (III.5) et (III.6), on peut en déduire l'équation

$$\left(-k(f_e(u) + f_h(u))p_x + (kf_e(u)\rho_e + kf_h(u)\rho_h)g \right)_x = 0$$

que l'on intègre :

$$-k(f_e(u) + f_h(u))p_x + (kf_e(u)\rho_e + kf_h(u)\rho_h)g = \alpha$$

où α est une fonction qui ne dépend que du temps (elle correspond au débit volumique total). On peut ainsi écrire que

$$p_x = \frac{-\alpha + (kf_e(u)\rho_e + kf_h(u)\rho_h)g}{k(f_e(u) + f_h(u))}$$

et en soustrayant $\rho_e g$, on a

$$p_x - \rho_e g = \frac{-\alpha}{k(f_e(u) + f_h(u))} + \frac{kf_h(u)(\rho_h - \rho_e)g}{k(f_e(u) + f_h(u))}.$$

En injectant cette équation dans (III.5), on aboutit finalement à l'équation sur la saturation de l'eau u suivante (u est l'inconnue) :

$$(\varphi u)_t + f(t, x, u)_x = 0 \quad \text{où} \quad f(t, x, u) = \frac{f_e(u)(-\alpha(t) + k(x)f_h(u)(\rho_h - \rho_e)g)}{f_e(u) + f_h(u)}.$$

Si $\rho_e = \rho_h$, on peut retrouver à partir de cette équation l'équation de Buckley-Leverett. La fonction f_e est croissante régulière et vérifie $f_e(0) = 0$ et la fonction f_h est décroissante régulière et vérifie $f_h(1) = 0$.

Pour simplifier, on prendra $\varphi \equiv 1$, $f_e(s) = s$ et $f_h(s) = 1 - s$ ainsi que $\alpha = 0$, $g = 1$ et $\rho_h - \rho_e = 1$ (le cas $\alpha = 1$ et $\rho_e = \rho_h$ étant connu). On obtient donc la loi de conservation

$$u_t + (ku(1 - u))_x = 0.$$

Lorsqu'on passe d'une strate géologique à une autre, la perméabilité k change brusquement. On va donc s'intéresser au cas où la perméabilité est définie par

$$k(x) = \begin{cases} k_L & \text{si } x < 0, \\ k_R & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

avec k_L et k_R positifs et non égaux.

2 Formulation entropique

On cherche à analyser le problème de Cauchy

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x (k(x)f(u(t, x))) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.7})$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{III.8})$$

$$k(x) = \begin{cases} k_L & \text{si } x < 0 \\ k_R & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (\text{III.9})$$

où $f(u) = u(1 - u)$, k_L et k_R sont positifs et $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ à valeur dans $[0, 1]$.

Le fait que k est discontinu pose problème, on ne peut pas directement appliquer les résultats classiques de l'analyse des lois de conservation, comme ceux de Khruzhkov [Kru70] par exemple, qui requièrent pour la plupart que k soit au moins continu. Nous allons voir comment étendre ces résultats à notre cas. La première étape est de proposer une notion de solution faible entropique adaptée.

On procède comme dans le cas classique en se basant sur l'entropie de Kruzhkov $|u - \kappa|$ et le flux d'entropie associé $\Phi(u, \kappa) = \text{sgn}(u - \kappa)(f(u) - f(\kappa))$. Cependant, comme k est discontinu, on ne peut pas procéder comme Khruzhkov, qui fait apparaître un terme incluant la dérivée de k . On régularise donc k dans un premier temps. Soit $\varepsilon > 0$ et k_ε une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant

- k_ε monotone,
- pour tout $x \leq \varepsilon$, $k_\varepsilon(x) = k_L$,
- pour tout $x \geq \varepsilon$, $k_\varepsilon(x) = k_R$.

L'hypothèse de monotonie signifie que la transition entre les deux strates L et R s'effectue de manière régulière, sans qu'un matériau autre que ceux de deux strates n'y soit piégé. On peut maintenant passer à la dérivation de la formulation entropique. Pour cela, on se donne $\kappa \in \mathbb{R}$ et on effectue pour les solutions régulières la série de calcul suivante :

$$\begin{aligned} & \partial_t u_\varepsilon + \partial_x(k_\varepsilon(x)f(u_\varepsilon)) = 0 \\ \implies & \partial_t(u_\varepsilon - \kappa) + \partial_x(k_\varepsilon(x)(f(u_\varepsilon) - f(\kappa))) + f(\kappa)k'_\varepsilon(x) = 0 \\ \implies & \text{sgn}(u_\varepsilon - \kappa) \left[\partial_t(u_\varepsilon - \kappa) + \partial_x(k_\varepsilon(x)(f(u_\varepsilon) - f(\kappa))) + f(\kappa)k'_\varepsilon(x) \right] = 0 \\ \implies & \partial_t |u_\varepsilon - \kappa| + \partial_x(k_\varepsilon(x)\Phi(u_\varepsilon, \kappa)) + \text{sgn}(u_\varepsilon - \kappa)f(\kappa)k'_\varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Au sens faible et en introduisant la dissipation d'entropie (en changeant en fait “= 0” en “ ≤ 0 ”...), on obtient, pour toute fonction test positive $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u_\varepsilon - \kappa| \partial_t + k_\varepsilon(x)\Phi(u_\varepsilon, \kappa)\partial_x] \varphi(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - \kappa| \varphi(0, x) dx \\ & - f(\kappa) \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(u_\varepsilon - \kappa)k'_\varepsilon(x)\varphi(t, x) dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Il reste à traiter le dernier terme. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} -f(\kappa) \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(u_\varepsilon - \kappa)k'_\varepsilon(x)\varphi(t, x) dx dt & \leq f(\kappa) \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |k'_\varepsilon(x)|\varphi(t, x) dx dt \\ & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} |k_L - k_R| f(\kappa) \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(t, 0) dt. \end{aligned}$$

On en déduit la

Définition III.1. Soit $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ à valeur dans $[0, 1]$. On dit qu'une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est une *solution faible entropique du problème* (III.7-III.9) si $0 \leq u \leq 1$ et si elle vérifie

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u - \kappa| \partial_t + k(x)\Phi(u, \kappa)\partial_x] \varphi(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - \kappa| \varphi(0, x) dx \\ & + |k_L - k_R| f(\kappa) \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(t, 0) dt \geq 0 \quad \text{(III.10)} \end{aligned}$$

pour toute fonction test positive $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $\kappa \in [0, 1]$.

Il n'est pas clair a priori que cette définition soit la bonne bien adapté au problème initial. En fait, seule l'analyse, qui va suivre, permet de la valider puisqu'elle conduit à un problème bien posé. On peut d'ores et déjà remarquer que cette définition est indépendante de la régularisation k_ε et que si $k_L = k_R$, on retombe sur la définition usuelle. De plus, en prenant successivement $\kappa = 0$ puis 1, on voit qu'une solution faible entropique est solution faible.

3 Unicité de la solution

On cherche à reproduire ici la démonstration d'unicité de Kruzhkov [Kru70]. Plus précisément, le résultat est que si on se donne deux données initiales u_0 et v_0 et si on note les solutions faibles entropiques associées u et v , alors on peut contrôler la différence entre u et v en fonction de la différence entre u_0 et v_0 . La démonstration est basée sur l'inégalité (au sens faible) de Kato

$$\partial_t |u - v|(t, x) + \partial_x \Phi(u, v)(t, x) \leq 0, \quad (\text{III.11})$$

qui s'obtient grâce au dédoublement de variables puis sur l'intégration de cette inégalité sur le cône de dépendance de l'équation. Le problème majeur réside dans la première étape. L'idée du dédoublement de variables est la suivante [Kru70, GR91] :

1. on suppose que u dépend de (t, x) et v de (s, y) ,
2. dans les formulations faibles entropiques de u et v on prend comme une fonction test dépendant de $(t, x, s, y) : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})^2)$ positive,
3. on intègre la formulation de u pour $(s, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et celle de v pour $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,
4. on remplace κ par $v(s, y)$ dans la formulation faible entropique de u , on remplace κ par $u(t, x)$ dans la formulation faible entropique de v et on additionne les deux formulations,
5. on choisit comme fonction test

$$\varphi(t, x, s, y) = \frac{1}{\varepsilon^2} \psi\left(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \rho\left(\frac{t-s}{2\varepsilon}\right) \rho\left(\frac{x-y}{2\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction positive de masse 1 ($\int_{\mathbb{R}} \rho(z) dz = 1$) et ψ est fonction positive de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$,

6. on passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et on obtient bien l'équation (III.11) au sens faible, avec pour fonction test ψ .

Ici aussi, on veut que l'inégalité de Kato (III.11) soit vérifiée. On peut immédiatement remarquer que si $\psi(t, x) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et x proche de 0, alors le dédoublement de variable continue de fonctionner, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u - v| \partial_t + k(x) \Phi(u, v) \partial_x] \psi(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \psi(0, x) dx \geq 0. \quad (\text{III.12})$$

Il reste donc à passer à une fonction test dont le support peut inclure $x = 0$. Pour cela, on introduit la fonction w_δ , $\delta > 0$, définie par

$$w_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \delta \\ 2\delta - |x|/\delta & \text{si } \delta \leq |x| \leq 2\delta \\ 0 & \text{si } |x| > 2\delta \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

et une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ positive. On peut alors choisir dans (III.12) comme fonction test $\psi(t, x) = \chi(t, x)(1 - w_\delta(x))$, ce qui donne après passage à la limite $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} [|u - v| \partial_t + k(x) \Phi(u, v) \partial_x] \chi(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0 - v_0| \chi(0, x) dx \\ & \geq \int_{\mathbb{R}^+} (k_L \Phi(\gamma u^-(t), \gamma v^-(t)) - k_R \Phi(\gamma u^+(t), \gamma v^+(t))) \chi(t, 0) dt \end{aligned}$$

où γu^\pm sont les traces à gauche et à droite de $x = 0$ de u (ces traces sont bien définies car u vérifie une équation vraiment non linéaire de part et d'autre de $x = 0$ [Vas01]). Le membre de droite peut être signé. Pour cela, on utilise le résultat suivant :

Lemme III.2. *Soit u une solution faible entropique du problème (III.7-III.9). Ses traces en $x = 0$ vérifient*

$$k_L f(\gamma u^-(t)) = k_R f(\gamma u^+(t)) \quad (\text{III.14})$$

$$\gamma u^+(t) > 1/2 \implies \gamma u^-(t) \geq 1/2 \quad (\text{III.15})$$

pour presque tout $t > 0$.

Démonstration. En prenant le même type de fonction test que ci-dessus, on voit qu'à l'interface on doit avoir p.p. tout $t > 0$

$$k_L \Phi(\gamma u^-(t), \kappa) - k_R \Phi(\gamma u^+(t), \kappa) + |k_L - k_R| f(\kappa) \geq 0.$$

Pour montrer (III.14), il suffit de prendre successivement $\kappa = 0$ puis 1. Pour (III.15), il suffit de prendre $\kappa = 1/2$ et d'étudier les différentes configurations suivant $\gamma u^-(t)$, $\gamma u^+(t)$ et $1/2$. \square

Ce lemme permet de construire l'ensemble des couples de traces $(\gamma u^-(t), \gamma u^+(t))$, notons-le $\mathcal{G} \subset [0, 1]^2$, que peut admettre une solution faible entropique. On peut alors en déduire (après calculs...) :

Lemme III.3. *Soit $(a^-, a^+), (b^-, b^+) \in \mathcal{G}$. Alors*

$$k_L \Phi(a^-, b^-) - k_R \Phi(a^+, b^+) \geq 0. \quad (\text{III.16})$$

Démonstration. Cette démonstration est simple mais fastidieuse, c'est une étude au cas par cas. \square

On en conclut donc que l'inégalité de Kato (III.12) est vérifiée pour toute fonction test ψ positive de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.

La fin de la démonstration de l'unicité est classique. On prend comme fonction test $\psi(t, x) = \chi_\delta(t) \omega_\delta(t, x)$, avec

$$\chi_\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T, \\ (T - t)/\delta + 1, & \text{si } T \leq t < T + \delta, \\ 0, & \text{si } t \geq T + \delta, \end{cases}$$

et

$$\omega_\delta(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq r + L(T - t), \\ (r + L(T - t) - |x|)/\delta + 1, & \text{si } r + L(T - t) \leq |x| < r + L(T - t) + \delta, \\ 0, & \text{si } |x| \geq r + L(T - t) + \delta, \end{cases}$$

où $L = \max(k_L, k_R) \max_{s \in [0, 1]} |f'(s)|$, ce qui donne après le passage à la limite $\delta \rightarrow 0$ le

Théorème III.4. Soit u_0 et v_0 deux données initiales dans $L^\infty(\mathbb{R})$ telles que $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$ p.p. sur \mathbb{R} . On note u et v des solutions faibles entropiques associées respectivement à u_0 et v_0 . Alors, si on définit $L = \max(k_L, k_R) \max_{s \in [0,1]} |f'(s)|$, on a pour tout $T > 0$ et $r > 0$

$$\int_{|x| < r} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq \int_{|x| < r+LT} |u_0(x) - v_0(x)| dx. \quad (\text{III.17})$$

4 Schéma volumes finis

Le but de cette partie est d'étendre l'analyse classique [GR91] des schémas volumes finis pour les lois de conservation à notre cas. On va (donner les principaux arguments pour) démontrer la convergence d'une large classe de schémas numériques vers la solution faible entropique du problème (III.7-III.9). Cela démontrera par la même occasion l'existence d'une solution faible entropique.

4.1 Écriture du schéma

Soient Δt et Δx les pas de temps et d'espace. On définit les interfaces du maillage par $x_i p = i\Delta x$, $i \in \mathbb{Z}$, on note les mailles $M_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ et on discrétise la donnée initiale :

$$u_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{M_i} u_0(x) dx.$$

La perméabilité (III.9) est discrétisée ainsi :

$$k_i = \begin{cases} k_L & \text{si } i \leq 0 \\ k_R & \text{si } i > 0 \end{cases}.$$

On s'intéresse à des schémas volumes finis de la forme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(u_i^n, u_{i+1}^n, k_i, k_{i+1}) - g(u_{i-1}^n, u_i^n, k_{i-1}, k_i)) \quad (\text{III.18})$$

où g est un flux numérique sur lequel on doit énoncer des conditions pour s'assurer de la convergence de la méthode vers la solution faible entropique du problème (III.7-III.9) :

- **Régularité.** $g \in \mathcal{C}^1([0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ et de constante de Lipschitz L .
- **Consistance.** $g(u, u, k, k) = kf(u)$, $g(0, 0, k, l) = g(1, 1, k, l) = 0$.
- **Monotonie.** $g(\nearrow, \searrow, \nearrow, \nearrow)$.

On va voir que ces conditions, naturelles en regard de celles à imposer dans le cas de lois de conservation classiques, sont suffisantes pour garantir la convergence, pourvu que la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2L} \quad (\text{III.19})$$

On utilisera aussi les notations

$$u_i^{n+1} = H(u_{i-1}^n, u_i^n, u_{i+1}^n, k_{i-1}, k_i, k_{i+1})$$

et

$$u_{\Delta x}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i^n \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}[\times M_i}(t, x)$$

en supposant qu'on a fixé Δt en fonction de Δx — on peut prendre par exemple $\xi \in]0, 1]$ tel que $2L\Delta t = \xi \Delta x$.

4.2 Propriétés du schéma numérique

Lemme III.5. Soit $u_0 \in \text{BV}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq u_0 \leq 1$ presque partout. Sous la condition CFL (III.19), la fonction H est croissante par rapport à ses trois premières variables (avec les trois dernières variables fixées). De plus, $u_{\Delta x}$ vérifie une borne \mathbf{L}^∞ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq u_i^n \leq 1,$$

et une borne BV en temps :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^{n+1} - u_i^n| \leq |u_0|_{\text{BV}(\mathbb{R})}. \quad (\text{III.20})$$

Démonstration. La démonstration des deux premiers points est classique (voir par exemple [GR91]). Du fait de la propriété de monotonie de H , on peut appliquer le lemme de Crandall-Tartar [CT80], donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x |u_i^{n+1} - u_i^n| &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x |u_i^n - u_i^{n-1}| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x |u_i^1 - u_i^0| \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta t |g(u_i^0, u_{i+1}^0, k_i, k_{i+1/2}) - g(u_{i-1}^0, u_i^0, k_{i-1/2}, k_i)| \\ &\leq L \Delta t \sum_{i \in \mathbb{Z}} (|u_i^0 - u_{i-1}^0| + |u_{i+1}^0 - u_i^0|) \\ &\leq 2L \Delta t |u_0|_{\text{BV}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On en déduit bien (III.20) grâce à la condition CFL (III.19). \square

Vu l'hétérogénéité du problème par rapport à x , on ne peut pas obtenir de borne BV en espace pour $u_{\Delta x}$, des oscillations peuvent apparaître aux abords de l'interface $x = 0$. Néanmoins, on peut utiliser la borne BV en temps (III.20) pour en déduire une estimation de la variation totale spatiale pour $x < 0$ et $x > 0$.

Lemme III.6. Soient deux réels $0 < A < B$. On suppose que $\Delta x < A/2$ et soit r tel que $\Delta x < r < A/2$. Soit $T = N\Delta t$, avec $N \in \mathbb{N}$. On a alors sous la condition CFL (III.19) la borne BV en espace

$$|u_{\Delta}(T, \cdot)|_{\text{BV}([A, B])} \leq |u_0|_{\text{BV}([A, B])} + \frac{T}{\xi L r} |u_0|_{\text{BV}(\mathbb{R})}. \quad (\text{III.21})$$

La démonstration de ce résultat se trouve dans [BGKT08] (Lemme 4.2). On remarque que si $r \rightarrow 0$, cette estimation explose. On peut cependant passer à la limite (à une sous-suite près) par un procédé d'extraction diagonale. À r fixé, on peut faire tendre Δx vers 0 et par le théorème de Helluy, extraire une limite. Il suffit alors d'appliquer ce processus pour une suite de valeurs de r tendant vers 0. On en déduit donc l'existence d'une limite (à extraction d'une sous-suite près). Il reste à vérifier que cette limite est une solution faible entropique. Pour cela, on dérive des inégalités d'entropie discrètes.

Lemme III.7. Sous la condition CFL (III.19), le schéma numérique vérifie pour tout $\kappa \in [0, 1]$

$$|u_i^{n+1} - \kappa| \leq |u_i^n - \kappa| - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} H_i^n \quad (\text{III.22})$$

où

$$G_{i+1/2}^n = g(u_i^n \top \kappa, u_{i+1}^n \top \kappa, k_i, k_{i+1}) - g(u_i^n \perp \kappa, u_{i+1}^n \perp \kappa, k_i, k_{i+1}),$$

$$H_i^n = |g(\kappa, \kappa, k_i, k_{i+1}) - g(\kappa, \kappa, k_{i-1}, k_i)|.$$

Démonstration. Là aussi, la démonstration est classique. On utilise la décomposition $|a - b| = a \top b - a \perp b$ et la monotonie du schéma numérique. Le terme H_i^n apparaît naturellement à l'interface $x_{1/2}$. \square

4.3 Convergence du schéma numérique et existence d'une solution

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de Lax-Wendroff sur les inégalités (III.22) pour vérifier que la limite de $u_{\Delta x}$ quand $\Delta x \rightarrow 0$ satisfait les inégalités d'entropie (III.10). La convergence du terme avec H_i^n dans (III.22) vers le terme interfacial de (III.10) s'obtient une nouvelle fois directement.

Théorème III.8. *Soit $u_0 \in \text{BV}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq u_0 \leq 1$ presque partout. Sous la condition CFL (III.19), le schéma numérique converge vers une solution faible entropique u du problème (III.7-III.9) au sens suivant : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|u_{\Delta x} - u\|_{\mathbf{L}^1(K)} = 0. \quad (\text{III.23})$$

Théorème III.9. *Soit $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq u_0 \leq 1$ presque partout. Alors, le problème (III.7-III.9) admet une unique solution faible entropique $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.*

Chapitre IV

Écoulements diphasiques compressibles

Ce chapitre est dédié à l'étude de modèles d'écoulements composés de deux phases distinctes. Par *phase*, on entend plusieurs choses. Un mélange diphasique peut être constitué de fluides distincts (gaz, hydrocarbure, eau...) mais aussi d'un même fluide présent sous plusieurs états (eau liquide et vapeur d'eau par exemple). On peut même combiner tout ça : un des challenges actuels est la description d'écoulements triphasiques contenant de l'eau liquide, de la vapeur d'eau et du gaz. Ce type d'écoulement apparaît dans de nombreux cas. Les applications classiques sont les écoulements dans des conduites pétrolières (gaz/hydrocarbures), dans les réseaux de conduites des centrales nucléaires (eau liquide/vapeur d'eau). Ces modèles peuvent aussi servir de validation de modèles simplifiés telles les équations de Saint-Venant.

Même si on va se restreindre ici aux fluides gazeux ou liquides compressibles, les propriétés du mélange peuvent énormément varier suivant les phases en présence, et donc les modèles. L'exemple qui est probablement le plus parlant concerne la *miscibilité*. Si on considère deux gaz dans un volume donné, chacun occupe tout le volume. Par contre, si on est en présence d'un liquide et d'un gaz, il n'y a pas de mélange et le volume total est donné par l'addition des volumes de chaque phase. Les propriétés dynamiques et thermodynamiques sont alors très différentes. On voit d'ailleurs que la description des interactions entre chaque phase dans le mélange triphasique cité plus haut est cruciale et complexe.

Le terme de *mélange* a été employé plus haut. Il sous-entend que l'échelle de description des écoulements sera macroscopique. On ne s'intéressera pas à une description complète d'un écoulement diphasique et des interfaces contenues. En particulier, dans le cas d'un écoulement liquide avec bulles, chaque bulle ne sera pas modélisée individuellement (idem pour des gouttes dans un gaz). Il est alors nécessaire de définir des grandeurs moyennes, en un sens à préciser. De plus, suivant le type d'écoulement considéré, le modèle pourra être plus ou moins compliqué. Une question standard (dont la réponse n'est cependant pas triviale) est : peut-on considérer qu'à l'échelle de description choisie les vitesses des phases sont localement égales ? Même question pour les pressions et températures ?

Nous allons donc tenter de donner quelques pistes pour obtenir ce type de modèles tout en précisant les mécanismes permettant de passer de l'un à l'autre. On tâchera aussi de présenter les difficultés mathématiques et limitations inhérentes à chacun de

ces modèles.

1 Modélisation des écoulements diphasiques compressibles

La dérivation des modèles diphasiques se fait en quatre étapes, dont certaines sont très proches de celles de la dérivation des équations de Saint-Venant.

1.1 Équations locales instantanées

On prend pour hypothèse que les deux phases sont immiscibles et qu'il n'y a pas de vide. On suppose de plus que la répartition des phases 1 et 2 est totalement déterminé et qu'en tout $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, on sait quelle est la phase présente. On peut alors définir l'ensemble $\Omega_k(t) \subset \mathbb{R}^d$ correspondant au domaine spatial occupé par la phase k à l'instant t , $k = 1, 2$, et on note l'interface $\Gamma(t) = (\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2)(t)$ (voir la figure IV.1).

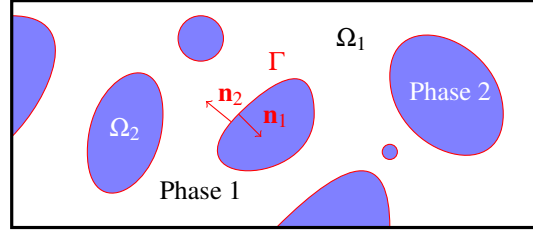


FIGURE IV.1 – Représentation d'un écoulement diphasique

On va maintenant supposer que chaque phase k , $k = 1, 2$, est régie par les équations d'Euler :

$$\forall t > 0, \mathbf{x} \in \Omega_k(t), \quad \begin{cases} \partial_t \rho_k + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = 0, \\ \partial_t (\rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla p_k = 0, \\ \partial_t (\rho_k E_k) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_k (\rho_k E_k + p_k)) = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

où $E_k = \varepsilon_k + |\mathbf{u}_k|^2/2$ et $p_k = \mathcal{P}_k(\rho_k, \rho_k \varepsilon_k)$. On supposera dans la suite que les lois de pression \mathcal{P}_k sont du type

$$\mathcal{P}_k(\rho_k, \rho_k \varepsilon_k) = (\gamma_k - 1) \rho_k \varepsilon_k + \pi_k, \quad \gamma_k > 1, \pi_k > 0. \quad (\text{IV.2})$$

Il reste à décrire la dynamique de la surface Σ . Tout d'abord, on va supposer qu'elle est suffisamment régulière pour pouvoir y définir presque partout une normale (Σ frontière lipschitzienne est suffisant). Par convention, on supposera que sa vitesse \mathbf{v}_Σ est toujours colinéaire à sa normale \mathbf{n}_Σ (orientée par convention de la phase 1 à la phase 2), ce qui permet de la définir de manière unique. On notera aussi $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_\Sigma$.

On introduit maintenant $\chi_k: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de la phase k , définie par

$$\chi_k(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_k(t), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela permet d'écrire les équations (IV.1) sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ en les multipliant par χ_k . Au sens des distributions, cette fonction vérifie [EX]

$$\begin{aligned} \nabla \chi_k &= -\mathbf{n}_k \delta_\Sigma, \\ \nabla(\chi_k f) &= \chi_k \nabla f - f \mathbf{n}_k \delta_\Sigma \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \\ \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{f}) &= \chi_k \nabla \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_k \delta_\Sigma \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n), n \geq 1, \\ \partial_t \chi_k &= \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_k \delta_\Sigma, \\ \partial_t (\chi_k \mathbf{f}) &= \chi_k \partial_t \mathbf{f} + (\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_k) \mathbf{f} \delta_\Sigma \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), n \geq 1. \end{aligned}$$

En supposant que les solutions des équations (IV.1) soient de classe \mathcal{C}^1 , on obtient pour $k = 1, 2$ et $\forall t > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{cases} \partial_t(\chi_k \rho_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \rho_k (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_\Sigma) \cdot \mathbf{n}_k \delta_\Sigma = 0, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\chi_k p_k) \\ \quad + [-\rho_k (\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_k) \mathbf{u}_k + \rho_k (\mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) \mathbf{n}_k + p_k \mathbf{n}_k] \delta_\Sigma = 0, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k (\rho_k E_k + p_k)) \\ \quad + [(\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_\Sigma) \rho_k E_k + p_k \mathbf{u}_k] \cdot \mathbf{n}_k \delta_\Sigma = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

On définit maintenant

$$\Gamma_{k\Sigma} = (\rho_k (\mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_k) \delta_\Sigma$$

qui représente le *transfert de masse*, c'est-à-dire la quantité de masse de la phase k entrant à l'interface (par unité de temps). Les équations (IV.3) peuvent alors se réécrire

$$\begin{cases} \partial_t(\chi_k \rho_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) = \Gamma_{k\Sigma}, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k) + \nabla(\chi_k p_k) - p_k \nabla \chi_k = \mathbf{u}_k \Gamma_{k\Sigma}, \\ \partial_t(\chi_k \rho_k E_k) + \nabla \cdot (\chi_k \mathbf{u}_k (\rho_k E_k + p_k)) + p_k \partial_t \chi_k = H_k \Gamma_{k\Sigma}, \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

où $H_k = E_k + p_k / \rho_k$ est l'enthalpie totale de la phase k . Chaque équation comporte des termes concentrés à l'interface qui entraînent la non conservation des masses, impulsions et énergies totales par phase. Par contre, il est naturel de supposer que la masse, l'impulsion et l'énergie totale du mélange soient conservées. Cela entraîne directement que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,2} \Gamma_{k\Sigma} &= 0, \\ \sum_{k=1,2} (\mathbf{u}_k \Gamma_{k\Sigma} - p_k \mathbf{n}_k \delta_\Sigma) &= 0, \\ \sum_{k=1,2} (H_k \Gamma_{k\Sigma} - p_k (\mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_k) \delta_\Sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

On peut remarquer que la première relation nous donne une expression de la vitesse interfaciale

$$\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_\Sigma \cdot \mathbf{n}_\Sigma = \frac{\rho_1 \mathbf{u}_1 - \rho_2 \mathbf{u}_2}{\rho_1 - \rho_2} \cdot \mathbf{n}_\Sigma \delta_\Sigma$$

tandis que les autres relient les différentes quantités à travers l'interface.

Attention, à ce stade, le système n'est pas fermé. Les relations de fermetures possibles portent sur le transfert de masse $\Gamma_{k\Sigma}$, en le définissant par exemple à partir des quantités thermodynamiques des deux phases à l'interface.

1.2 Un modèle simple de mélange de fluides non miscibles sans transfert de masse

Une fermeture assez classique dans le cas de mélange de fluides non miscibles est d'imposer

$$\mathbf{v}_\Sigma \equiv \mathbf{u}_1 \delta_\Sigma \equiv \mathbf{u}_2 \delta_\Sigma, \quad (\text{IV.6})$$

ce qui annule le transfert de masse $\Gamma_{k\Sigma}$ et implique $p_1 \delta_\Sigma \equiv p_2 \delta_\Sigma$. Si on note

$$\begin{aligned} \rho_m &= \chi_1 \rho_1 + \chi_2 \rho_2, \\ \rho_m \mathbf{u}_m &= \chi_1 \rho_1 \mathbf{u}_1 + \chi_2 \rho_2 \mathbf{u}_2, \\ \rho_m E_m &= \chi_1 \rho_1 E_1 + \chi_2 \rho_2 E_2, \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

la masse volumique, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange, on peut déduire de (IV.4-IV.5) le système

$$\begin{cases} \partial_t \chi_1 + \mathbf{u}_m \cdot \nabla \chi_1 = 0, \\ \partial_t \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m) = 0, \\ \partial_t (\rho_m \mathbf{u}_m) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}_m \otimes \mathbf{u}_m) + \nabla p_m = 0, \\ \partial_t (\rho_m E_m) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_m (\rho_m E_m + p_m)) = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

où $E_m = \varepsilon_m + |\mathbf{u}_m|^2$ et

$$p_m = \mathcal{P}_m(\chi_1, \rho_m, \rho_m \varepsilon_m) = \begin{cases} \mathcal{P}_1(\rho_1, \rho_1 \varepsilon_1) & \text{si } \chi_1 = 1, \\ \mathcal{P}_2(\rho_2, \rho_2 \varepsilon_2) & \text{si } \chi_1 = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Proposition IV.1. *En supposant la continuité des vitesses à l'interface (IV.6), le système (IV.4-IV.5) est équivalent au système (IV.7-IV.9). De plus, ce système est fermé.*

Démonstration. Comme on a (IV.6), les trois dernières équations de (IV.8) se déduisent par somme sur k de (IV.4-IV.5) et la première est obtenue à partir des propriétés de la fonction χ_k et de l'égalité des vitesses à l'interface (IV.6).

Pour la réciproque, il suffit de constater que les équations (IV.8) implique (IV.1) et les termes dus à l'interface disparaissent grâce à (IV.6). On peut d'ailleurs vérifier que toute solution de (IV.8) vérifie $p_1 \delta_\Sigma = p_2 \delta_\Sigma$ [EX].

Enfin, en remarquant que $\chi_2 = 1 - \chi_1$, on peut vérifier que le système (IV.7-IV.9) est fermé. \square

Ce système, très proche des équations d'Euler, vérifie les même propriétés.

Théorème IV.2. *Le système (IV.7-IV.9) est non strictement hyperbolique si $d > 1$. Si $d = 1$, il est strictement hyperbolique et il existe une et une seule solution au problème de Riemann associé.*

Démonstration. [EX] \square

Du point de vue théorique et de la modélisation, ce système est très satisfaisant. La difficulté est d'ordre numérique. En effet, il est nécessaire de préserver au niveau discret le fait que χ_1 est à valeur dans $\{0, 1\}$, c'est-à-dire que cette fonction doit être convectée sans introduire de diffusion numérique. Dans le cas contraire, une zone de « mélange » pourrait apparaître ($0 < \chi_1 < 1$) dans laquelle on ne connaît pas le modèle (en particulier la loi de pression).

Plusieurs types de méthodes numériques existent pour éviter la diffusion numérique. Cependant, lorsque la taille caractéristique d'un des domaines Ω_k devient plus petite que les mailles (c'est le cas en présence d'instabilités, de bulles ou de gouttelettes notamment), alors il est impossible de préserver χ_1 dans $\{0, 1\}$ et donc d'obtenir une approximation numérique « physiquement » valide.

Pour contourner ce problème, on est amené à définir des modèles dits « moyennés », c'est-à-dire que les interfaces ne sont plus véritablement localisées, ce qui permet d'avoir en même point coexistence des deux fluides.

1.3 Moyenne statistique

Il existe plusieurs opérateurs de moyenne, tous ayant pour but de décrire à une échelle macroscopique l'évolution de l'écoulement diphasique. Nous allons décrire tout d'abord la moyenne statistique, qui est la plus fréquemment utilisée.

Imaginons un écoulement dispersé, c'est-à-dire que l'une des phases, dite *phase continue* est présente de manière prépondérante alors que l'autre phase, dite *phase dispersée*, a pour domaine un ensemble d'ouverts de très petite taille (gouttelettes, bulles). À l'échelle de l'observateur, la description d'un tel écoulement par les équations précédentes est beaucoup trop fine car elle contient tous les détails de chaque interface. Il serait alors nécessaire de résoudre les équations d'Euler dans la phase dispersée, donc dans chaque gouttelette ou chaque bulle. Pour éviter cela, on va appliquer un processus de moyenne sur les équations. L'idée de la moyenne statistique est la suivante. À l'échelle de l'expérimentateur, un état observé peut correspondre à plusieurs configurations d'écoulement, différentes au niveau « le plus fin », c'est-à-dire celui de la description ci-dessus. Ainsi, pour un temps t et une position \mathbf{x} donnés, on ne peut déterminer exactement les variables décrivant l'écoulement, mais on supposera tout de même qu'on peut déterminer un intervalle dans lesquelles elles varient. Pour décrire cet intervalle, on va paramétrer les solutions de (IV.3) par $\mu \in [0, 1]$: $\chi_k(t, \mathbf{x})$ devient $\chi_k(t, \mathbf{x}; \mu)$, $\rho_k(t, \mathbf{x})$ devient $\rho_k(t, \mathbf{x}; \mu)$, etc. Le paramètre μ , qu'on aurait pu prendre vectoriel, permet de tenir compte de l'incertitude de la mesure de l'observateur à son échelle, par rapport à l'échelle fine. On ne sait a priori pas déterminer la dépendance des différentes variables par rapport à μ , mais en fait, on ne le désire pas, car on ne voudra modéliser (pour reproduire théoriquement et numériquement) que les solutions observables. Ainsi, on va chercher à proposer un modèle pour les moyennes des variables par rapport à μ . Ce paramètre étant destiné à tenir compte d'incertitudes, on parle donc de moyenne statistique.

Remarque 1. On peut être tenté de faire une analogie alors la notion de *mesures de Young*. En effet, le fait savoir que chaque variable est à valeur dans un intervalle donné signifie qu'on est en présence d'une famille de solutions, non dénombrable, qui vérifie une estimation \mathbf{L}^∞ . On veut alors obtenir un modèle dont la solution serait un point d'accumulation de cette famille. Vu qu'on n'a qu'une estimation \mathbf{L}^∞ , le seul outil dont on dispose est les mesures de Young (on ne donne ici leur interprétation en tant que fonction paramétrée) :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, et $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset \mathbf{L}^\infty(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, et une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\Omega \times [0, 1])$ telles que

$$\forall \varphi \in \mathbf{L}^1(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi \, dx = \int_0^1 \int_{\Omega} u(x, \mu) \varphi \, dx \, d\mu.$$

Ce $u(x, \mu)$, qui n'est pas forcément unique, correspond à celui qu'on a introduit « à la main » ci-dessus. On peut notamment se référer à [Ser91, Hil07] où le problème

d'obtenir un modèle homogénéisé issu du même genre de préoccupation est étudié à l'aide de ce type d'outil.

On définit la *moyenne statistique* d'une fonction $\mathbf{f}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, par

$$\langle \mathbf{f} \rangle(t, \mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{f}(t, x, \mu) d\mu. \quad (\text{IV.10})$$

De part sa définition, cette moyenne commute avec l'opérateur de dérivation par rapport à t et \mathbf{x} ,

$$\langle \partial_\alpha f \rangle = \partial_\alpha \langle f \rangle, \quad \alpha = t, \mathbf{x}.$$

Une variable associée à la description locale instantanée (IV.3) peut alors être décomposée en deux parties,

$$f = \langle f \rangle + f', \quad \text{où } \langle f' \rangle = 0,$$

et f' représente les *fluctuations* de f . Dans toute la suite, on supposera que les fluctuations des différentes variables sont petites et donc négligeables. De plus, la moyenne d'un produit vérifie

$$\langle fg \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle + \langle f' g' \rangle,$$

où on peut donc négliger le dernier terme.

On suppose à partir de maintenant que toutes les variables intervenant dans la description locale instantanée sont paramétrées par $\mu \in [0, 1]$ mais les équations (IV.4) restent bien sûr inchangées. Tout comme on l'a fait pour lors de la dérivation des équations de Saint-Venant, on va définir des grandeurs moyennes associées aux variables de (IV.4) et ainsi déterminer les équations qu'elles vérifient.

La première grandeur moyenne qui nous intéresse est celle reliée à la présence d'une phase,

$$\alpha_k = \langle \chi_k \rangle.$$

On remarque que α_k est à valeur dans $[0, 1]$ et que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

On peut interpréter $\alpha_k(t, \mathbf{x})$ comme la *probabilité de présence*, ou *taux de présence*, de la phase k au point (t, \mathbf{x}) . Il est aussi souvent assimilé à une *fraction volumique* — cette dénomination peut être justifiée en passant par un autre type de moyenne.

À partir du taux de présence, on peut alors définir la *moyenne phasique* d'une quantité associée à la phase k par

$$\langle f_k \rangle_k = \frac{1}{\alpha_k} \langle \chi_k f_k \rangle = \frac{\langle \chi_k f_k \rangle}{\langle \chi_k \rangle} \approx \langle f_k \rangle. \quad (\text{IV.11})$$

Cette moyenne sera notamment utilisée pour les masses volumiques et les pressions. Pour la vitesse, la moyenne couramment utilisée est elle aussi pondérée,

$$\langle\langle \mathbf{u}_k \rangle\rangle_k = \frac{\langle \chi_k \rho_k \mathbf{u}_k \rangle}{\langle \chi_k \rho_k \rangle} \approx \langle \mathbf{u}_k \rangle_k \approx \langle \mathbf{u}_k \rangle.$$

Une première équation concerne le taux de présence en moyennant les relations vérifiées par χ_k :

$$\partial_t \alpha_k + \langle\langle \mathbf{v}_\Sigma \rangle\rangle \cdot \nabla \alpha_k = 0.$$

On applique maintenant l'opérateur de moyenne $\langle \cdot \rangle$ aux équations (IV.4) et on a le système approché suivant : ([EX] déterminer dans (IV.12) les relations approchées et les relations exactes)

$$\begin{cases} \partial_t (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k) = \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle, \\ \partial_t (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k \otimes \langle \mathbf{u}_k \rangle_k) + \nabla (\alpha_k \langle p_k \rangle_k) \\ \quad - \langle p_k \rangle_{k\Sigma} \nabla \alpha_k = \langle \mathbf{u}_k \rangle_{k\Sigma} \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle, \\ \partial_t (\alpha_k \langle \rho_k \rangle_k \langle E_k \rangle_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \langle \mathbf{u}_k \rangle_k (\langle \rho_k \rangle_k \langle E_k \rangle_k + \langle p_k \rangle_k)) \\ \quad + \langle p_k \rangle_{k\Sigma} \partial_t \alpha_k = \langle H_k \rangle_{k\Sigma} \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle, \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

où les moyennes $\langle \cdot \rangle_{k\Sigma}$ correspondent à des moyennes de quantités interfaciales, c'est-à-dire de quantités évaluées à l'interface avant l'application de l'opérateur de moyenne. Vu la forme des lois d'état (IV.2), on a directement

$$\langle p_k \rangle_k = \mathcal{P}_k(\langle \rho_k \rangle_k, \langle \rho_k \rangle_k \langle \varepsilon_k \rangle_k).$$

De plus, on suppose à nouveau que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange sont conservées, ce qui donne les relations

$$\sum_{k=1,2} \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle = 0, \quad (\text{IV.13a})$$

$$\sum_{k=1,2} (\langle \mathbf{u}_k \rangle_{k\Sigma} \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle + \langle p_k \rangle_{k\Sigma} \nabla \alpha_k) = 0, \quad (\text{IV.13b})$$

$$\sum_{k=1,2} (\langle H_k \rangle_{k\Sigma} \langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle - \langle p_k \rangle_{k\Sigma} \partial_t \alpha_k) = 0. \quad (\text{IV.13c})$$

Comme dans le modèle local instantané (IV.4), le transfert de masse doit être défini par ailleurs. Cependant, il est commun de supposer qu'il existe une vitesse à l'interface \mathbf{v}_I et une pression à l'interface p_I telles que

$$\mathbf{v}_I = \langle \mathbf{u}_1 \rangle_{1\Sigma} = \langle \mathbf{u}_2 \rangle_{2\Sigma} = \langle \mathbf{v}_\Sigma \rangle \quad \text{et} \quad p_I = \langle p_1 \rangle_{1\Sigma} = \langle p_2 \rangle_{2\Sigma}$$

pour simplifier la vérification des relations (IV.13). Ainsi, les relations (IV.13b) et (IV.13c) sont une conséquence directe de (IV.13a). Il resterait maintenant à donner une définition des différents termes restant, comme \mathbf{v}_I , p_I , $\langle \Gamma_{k\Sigma} \rangle$... Pour cela, on fait référence à [Ish75], ouvrage qui fait référence dans le domaine des écoulements diphasiques (voir aussi sa récente extension [IH06] ainsi que [DP98]), où des opérateurs de moyenne différents (mais relativement proches) sont utilisés.

1.4 Réduction de dimension : moyenne spatiale

On va ici regarder une autre méthode pour obtenir des équations similaires au système (IV.13). Elle se base sur la même idée que la dérivation des équations de Saint-Venant et elle permet d'avoir des expressions explicites des termes non précisés ci-dessus.

1.4.1 Modèle local instantané

On suppose que la configuration est stratifiée et que le fluide 1 est sous le fluide 2, voir la figure IV.2 pour les différentes notations. Les différentes inconnues dépendent de t , x et z et l'objectif est d'obtenir des équations sur des inconnues moyennes, ne

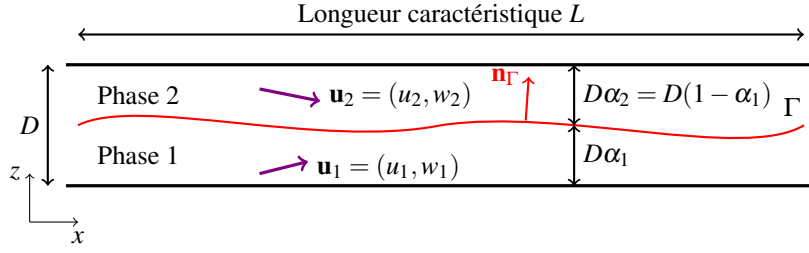


FIGURE IV.2 – Configuration supposée de l'écoulement diphasique

dépendant donc que de t et x . Pour cela, on va supposer que $L \gg D$, c'est-à-dire que le diamètre du tuyau est petit devant la longueur (cette hypothèse est du même type que l'hypothèse d'écoulements de faible profondeur).

Dans le but d'obtenir un modèle diphasique incluant les forces d'interaction entre les phases, on va supposer que chaque phase est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t \rho_k + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (\text{IV.14})$$

$$\partial_t (\rho_k \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}(\rho_k \mathbf{u}_k \otimes \mathbf{u}_k - \boldsymbol{\sigma}_k) = 0 \quad (\text{IV.15})$$

avec $\boldsymbol{\sigma}_k = -p_k(\rho_k) \mathbf{I} + \mu_k((\nabla \otimes \mathbf{u}_k) + (\nabla \otimes \mathbf{u}_k)^T)$. Ces équations sont posées sur Ω_k , où

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(t, x, z) \mid t > 0, z \in [0, D\alpha_1(t, x)]\} \\ \text{et } \Omega_2 &= \{(t, x, z) \mid t > 0, z \in [D\alpha_1(t, x), D]\}. \end{aligned}$$

Les conditions aux bords sont données par

$$\begin{cases} (\kappa_1 u_1 - \mu_1 \partial_z u_1)(t, x, 0) = 0 \\ w_1(t, x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\kappa_2 u_2 + \mu_2 \partial_z u_2)(t, x, D) = 0 \\ w_2(t, x, D) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

et à l'interface, on suppose les conditions de raccord suivantes :

$$\mathbf{u}_1(t, x, D\alpha_1(t, x)) = \mathbf{u}_2(t, x, D\alpha_1(t, x)) \quad =: \mathbf{v}_I(t, x) \quad (\text{IV.17})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1(t, x, D\alpha_1(t, x)) \cdot \mathbf{n}_\Gamma(t, x) = \boldsymbol{\sigma}_2(t, x, D\alpha_1(t, x)) \cdot \mathbf{n}_\Gamma(t, x) \quad (\text{IV.18})$$

où $\mathbf{n}_\Gamma = (-\partial_x(D\alpha), 1)^T / \sqrt{1 + (\partial_x(D\alpha_1))^2}$.

On va supposer dans la suite que $D \ll L = 1$, et prendre pour hypothèse que

$$z = \mathcal{O}(D) \quad \text{et} \quad w_k = \mathcal{O}(D). \quad (\text{IV.19})$$

De plus, on désire obtenir un modèle moyenné final qui ne contient pas de termes visqueux. Pour cela, on est amené à supposer que

$$\mu_k = D\mu_k^0 \quad \text{et} \quad \kappa_k = D\kappa_k^0 \quad (\text{IV.20})$$

où μ_k^0 et κ_k^0 sont des constantes.

1.4.2 Équations sur les fractions

L'évolution de l'interface est décrite par l'équation

$$\partial_t(D\alpha_1(t,x)) = \mathbf{v}_I(t,x) \cdot \mathbf{n}_\Gamma(t,x) \sqrt{1 + (\partial_x(D\alpha_1))^2} \quad (\text{IV.21})$$

$$\implies \partial_t \alpha_1 + \mathbf{u}_I \partial_x \alpha_1 - \mathbf{w}_I/D = 0 \quad (\text{IV.22})$$

$$\implies \partial_t \alpha_2 + \mathbf{u}_I \partial_x \alpha_2 + \mathbf{w}_I/D = 0. \quad (\text{IV.23})$$

Pour vérifier cela, il suffit de regarder les équations des fonctions indicatrices de chaque phase, comme cela avait été fait pour les équations de Saint-Venant.

Les termes en rouge seront traités ultérieurement.

1.4.3 Conservation des masses partielles

On intègre (IV.14) avec $k = 1$ pour $z \in (0, D\alpha_1(t,x))$ et on obtient

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 dz - [\rho_1(D\alpha_1) \partial_t(D\alpha_1) - \rho_1(0) \partial_t 0] \\ & + \partial_x \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 u_1 dz - [\rho_1 u_1(D\alpha_1) \partial_t(D\alpha_1) - \rho_1 u_1(0) \partial_t 0] \\ & + \rho_1 w_1(D\alpha_1) - \rho_1 w_1(0) = 0 \\ \iff & \partial_t \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 dz + \partial_x \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 u_1 dz \\ & - [\rho_1(D\alpha_1) \partial_t(D\alpha_1) + \rho_1 u_1(D\alpha_1) \partial_t(D\alpha_1) - \rho_1 w_1(D\alpha_1)] = 0 \end{aligned}$$

où les notations du type $\rho_1(D\alpha_1)$ signifient ici et dans la suite $\rho_1(t,x,D\alpha_1(t,x))$. Si on utilise (IV.22), on a bien

$$\partial_t \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 dz + \partial_x \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 u_1 dz = 0.$$

On définit alors les quantités moyennes suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1(t,x) &= \frac{1}{D\alpha_1} \int_0^{D\alpha_1} \rho_1(t,x,z) dz, \\ \bar{\rho}_1 \bar{u}_1(t,x) &= \frac{1}{D\alpha_1} \int_0^{D\alpha_1} \rho_1 u_1(t,x,z) dz. \end{aligned}$$

On en déduit alors l'équation suivante sur les quantités moyennes :

$$\partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1) = 0. \quad (\text{IV.24})$$

De même, on peut obtenir

$$\partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \bar{u}_2) = 0. \quad (\text{IV.25})$$

1.4.4 Quantités de mouvement horizontal

Écrivons maintenant la première composante de l'équation de quantité de mouvement (IV.15) pour $k = 1$ et étudions la dimension de chaque terme. Ainsi, grâce aux hypothèses (IV.19) et (IV.20), on a

$$\partial_t \underset{\mathcal{O}(1)}{\rho_1 u_1} + \partial_x(\underset{\mathcal{O}(1)}{\rho_1 u_1^2} + p_1) + \partial_z \underset{\mathcal{O}(1)}{\rho_1 u_1 w_1} = \mu_1 (2 \underset{\mathcal{O}(D)}{\partial_{xx} u_1} + \underset{\mathcal{O}(D^{-1})}{\partial_{zz} u_1} + \underset{\mathcal{O}(D)}{\partial_{xz} w_1}). \quad (\text{IV.26})$$

On en déduit donc que $\partial_z u_1 = \mathcal{O}(1)$, c'est-à-dire que les variations de la vitesse horizontale u_1 dans la direction verticale sont négligeables (puisque d'ordre D). On a bien sûr le même résultat pour u_2 . Cette propriété assure notamment que

$$\overline{(u_1)^2} = (\bar{u}_1)^2 + \mathcal{O}(D).$$

En outre, on va supposer que (cette approximation sera justifiée ultérieurement par l'équation (IV.29))

$$\overline{p_1(\rho_1)} = p_1(\bar{\rho}_1) + \mathcal{O}(D).$$

On peut alors écrire une équation sur les valeurs moyennes en intégrant sur $z \in (0, D\alpha_1)$ la première composante de l'équation de quantité de mouvement (IV.15) pour $k = 1$:

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1) + \partial_x(\alpha_1 \bar{\rho}_1 \bar{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_1(\rho_1(D\alpha_1)) \partial_x \alpha_1 \\ = \mu_1^0 \partial_z u_1(D\alpha_1) - \kappa_1^0 u_1(0) + \mathcal{O}(D). \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

La propriété sur la vitesse horizontale permet remplacer le terme de friction par $\kappa_1^0 \bar{u}_1$. Il reste à fermer le terme en rouge. On obtient de la même manière l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \bar{u}_2) + \partial_x(\alpha_2 \bar{\rho}_2 \bar{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_2(\rho_2(D\alpha_1)) \partial_x \alpha_2 \\ = -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \mu_2^0 \partial_z u_2(D\alpha_1) + \mathcal{O}(D). \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

1.4.5 Quantités de mouvement vertical

On effectue une analyse dimensionnelle sur la deuxième composante de l'équation de quantité de mouvement (IV.15) pour $k = 1$, ce qui donne

$$\frac{\partial_t \rho_1 w_1}{\mathcal{O}(D)} + \frac{\partial_x \rho_1 u_1 w_1}{\mathcal{O}(D)} + \frac{\partial_z(\rho_1 w_1^2 + p_1)}{\mathcal{O}(D)} = \frac{\mu_1(\partial_{xx} w_1 + 2\partial_{zz} w_1 + \partial_{xz} u_1)}{\mathcal{O}(D^2)} + \frac{\mu_1 \partial_z w_1}{\mathcal{O}(1)} + \frac{p_1}{\mathcal{O}(D)}$$

On obtient donc

$$\partial_z p_1 = 2\mu_1 \partial_{zz} w_1 + \mathcal{O}(D), \quad (\text{IV.29})$$

c'est-à-dire que les variations de la pression p_1 dans la direction verticale sont négligeables.

1.4.6 Fermeture des équations

Il reste maintenant à déterminer une expression des termes en rouge dans les équations (IV.22), (IV.27) et (IV.28) en fonction des quantités moyennées. Il nous reste pour cela à exploiter les relations de fermeture (IV.18) :

$$\begin{aligned} -(-p_1 + 2\mu_1 \partial_x u_1) \partial_x(D\alpha_1) + \mu_1(\partial_z u_1 + \partial_x w_1) \\ = -(-p_2 + 2\mu_2 \partial_x u_2) \partial_x(D\alpha_1) + \mu_2(\partial_z u_2 + \partial_x w_2), \\ -\mu_1(\partial_z u_1 + \partial_x w_1) \partial_x(D\alpha_1) + 2\mu_1 \partial_z w_1 - p_1 \\ = -\mu_2(\partial_z u_2 + \partial_x w_2) \partial_x(D\alpha_1) + 2\mu_2 \partial_z w_2 - p_2. \end{aligned}$$

Une analyse dimensionnelle donne

$$\begin{aligned} -\frac{(-p_1 + 2\mu_1 \partial_x u_1) \partial_x(D\alpha_1)}{\mathcal{O}(D)} + \frac{\mu_1(\partial_z u_1 + \partial_x w_1)}{\mathcal{O}(D^2)} = (\dots)_2, \\ -\frac{\mu_1(\partial_z u_1 + \partial_x w_1) \partial_x(D\alpha_1)}{\mathcal{O}(D^2)} + \frac{2\mu_1 \partial_z w_1 - p_1}{\mathcal{O}(D)} = (\dots)_2, \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire les égalités approchées suivantes :

$$p_1(D\alpha_1) = p_2(D\alpha_1) + \mathcal{O}(D) \quad (\text{IV.30})$$

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(D\alpha_1) = \mu_2^0 \partial_z u_2(D\alpha_1) + \mathcal{O}(D) \quad (\text{IV.31})$$

$$\mu_1 \partial_z w_1(D\alpha_1) - p_1(D\alpha_1) = \mu_2 \partial_z w_2(D\alpha_1) - p_2(D\alpha_1) + \mathcal{O}(D^2) \quad (\text{IV.32})$$

On peut remarquer que les termes dans l'égalité (IV.31) sont ceux apparaissant dans (IV.27) et (IV.28). On utilise alors les approximations suivantes :

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(D\alpha_1) = \mu_1^0 \frac{u_1(D\alpha_1) - \bar{u}_1}{(D\alpha_1)/2} + \mathcal{O}(D)$$

$$\mu_2^0 \partial_z u_2(D\alpha_1) = \mu_2^0 \frac{\bar{u}_2 - u_2(D\alpha_1)}{(D\alpha_2)/2} + \mathcal{O}(D)$$

et en utilisant la condition (IV.17) qui assure que $u_I(t, x) = u_1(t, x, D\alpha_1) = u_2(t, x, D\alpha_1)$, on obtient les expressions

$$u_I = \beta \bar{u}_1 + (1 - \beta) \bar{u}_2 \quad \text{où} \quad \beta = \frac{\mu_1^0 \alpha_2}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} \in (0, 1), \quad (\text{IV.33})$$

$$\mu_1^0 \partial_z u_1(D\alpha_1) = -\mu_2^0 \partial_z u_2(D\alpha_1) = \frac{1}{D} \frac{2\mu_1^0 \mu_2^0}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1). \quad (\text{IV.34})$$

La vitesse interfaciale u_I est donc une combinaison convexe des vitesses moyennes et on voit que les autres termes s'apparentent à des termes de traînée. De la même manière, on peut remarquer que l'égalité (IV.30) implique l'existence d'une pression interfaciale $p_I(t, x) = p_1(t, x, D\alpha_1(t, x)) = p_2(t, x, D\alpha_1(t, x))$. Ensuite, en approchant les dérivées verticales comme précédemment dans (IV.32) et dans (IV.29), on obtient tous calculs faits

$$\frac{w_i}{D} = \frac{1}{D} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \mu_2^0 + \alpha_2 \mu_1^0} (\bar{p}_1 - \bar{p}_2). \quad (\text{IV.35})$$

Il est important de noter que cette expression entraîne que $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \mathcal{O}(D)$, donc à D près, on peut prendre par exemple

$$p_I(t, x) = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2}. \quad (\text{IV.36})$$

(D'ailleurs, si on regarde précisément (IV.34), on remarque là aussi que $\bar{u}_1(D\alpha_1) - \bar{u}_2(D\alpha_1) = \mathcal{O}(D)$ et donc que $u_I = \bar{u}_1(D\alpha_1) = \bar{u}_2(D\alpha_1)$ à D près.)

1.4.7 Le modèle final issu de la dérivation

Le modèle final issu de cette dérivation est donc

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha_1 + u_I \partial_x \alpha_1 &= \Theta_p (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \\ \partial_t (\alpha_1 \bar{p}_1) + \partial_x (\alpha_1 \bar{p}_1 \bar{u}_1) &= 0 \\ \partial_t (\alpha_2 \bar{p}_2) + \partial_x (\alpha_2 \bar{p}_2 \bar{u}_2) &= 0 \\ \partial_t (\alpha_1 \bar{p}_1 \bar{u}_1) + \partial_x (\alpha_1 \bar{p}_1 \bar{u}_1^2 + \alpha_1 \bar{p}_1) - p_I \partial_x \alpha_1 &= -\kappa_1^0 \bar{u}_1 + \Theta_u (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \\ \partial_t (\alpha_2 \bar{p}_2 \bar{u}_2) + \partial_x (\alpha_2 \bar{p}_2 \bar{u}_2^2 + \alpha_2 \bar{p}_2) - p_I \partial_x \alpha_2 &= -\kappa_2^0 \bar{u}_2 + \Theta_u (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

où les quantités interfaciales sont définies par

$$u_I = \frac{\mu_1^0 \alpha_2}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} \bar{u}_1 + \frac{\mu_2^0 \alpha_1}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} \bar{u}_2 \quad \text{et} \quad p_I = \frac{\bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2} \quad (\text{IV.38})$$

et les coefficients de relaxation sont donnés par

$$\Theta_p = \frac{1}{D} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \mu_2^0 + \alpha_2 \mu_1^0} \quad \text{et} \quad \Theta_u = \frac{1}{D} \frac{2\mu_1^0 \mu_2^0}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1}. \quad (\text{IV.39})$$

Pour fermer totalement ce système, il reste à ajouter les relations

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad \text{et} \quad p_k = p_k(\bar{p}_k). \quad (\text{IV.40})$$

Remarque 2. Ce système comporte au final autant d'équations que d'inconnues. Néanmoins, vu que l'erreur effectuée en général est d'ordre D , on ne devrait pas distinguer les vitesses u_I , \bar{u}_1 et \bar{u}_2 et les pressions p_I , \bar{p}_1 et \bar{p}_2 . Pour éviter ce problème, il faudrait remplacer les relations (IV.17-IV.18), qui peuvent être assimilées à une double condition de Dirichlet, par des relations de type double condition de Navier entre les phases.

La dérivation effectuée ci-dessus s'inspire fortement de celle mise en œuvre par Stewart et Wendroff dans [SW84]. Le modèle final apparaît notamment dans les articles [BN86], [SA99], [GHS04].

1.4.8 Propriétés du modèle obtenu

On va présenter les propriétés de base du modèle (IV.37-IV.40) (on omettra dans la suite les barres $\bar{\cdot}$). Une première remarque concerne les termes de relaxation : on a bien

$$\Theta_u, \Theta_p \geq 0,$$

ce qui assure — au moins formellement — que les équilibres $u_1 = u_2$ et $p_1 = p_2$ sont stables. De plus, si on néglige les termes de friction (en prenant $\kappa_k^0 = 0$), alors on a conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\partial_t(\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x(\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = 0,$$

en plus de la conservation de chaque masse partielle $\alpha_k \rho_k$. Enfin, si α_1 est constant, alors le modèle se réduit à deux systèmes d'Euler couplés seulement par les termes source.

Passons maintenant à la structure de la partie différentielle du modèle, c'est-à-dire au membre de gauche de (IV.37). On a le résultat suivant :

Proposition IV.3. *Soit le domaine des états admissible*

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{U} = (\alpha_1, \alpha_1 \rho_1, (1 - \alpha_1) \rho_2, \alpha_1 \rho_1 u_1, (1 - \alpha_1) \rho_2 u_2)^T \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}.$$

Le système associé au membre de gauche de (IV.37) avec $u_I = u_I(\mathbf{U})$ et $p_I = p_I(\mathbf{U})$ quelconques admet pour valeurs propres

$$u_I, u_1 - c_1, u_1 + c_1, u_2 - c_2, u_2 + c_2,$$

où c_k est la vitesse du son usuelle associée à la loi de pression p_k . Les champs associés aux quatre dernières valeurs propres sont vraiment non linéaires. De plus, ce système est hyperbolique sur

$$\mathcal{U} \setminus \cup_{k=1,2} \{u_I = |u_k| + c_k\}.$$

La perte d'hyperbolicité se traduit par une dégénérescence de la base de vecteurs propres.

Le phénomène de perte d'hyperbolicité est connu sous le nom de résonance. Si on regarde [IT95] ou [GL04], on peut voir que cela conduit à une perte d'unicité des solutions.

Il est naturel que l'onde associée à la valeur propre u_I soit une discontinuité de contact puisqu'on peut l'assimiler à une interface qui doit rester infiniment mince. Ainsi :

Proposition IV.4. *Supposons que u_I est une combinaison linéaire de u_1 et u_2 dont les coefficients ne dépendent que de α_k et ρ_k . Alors le champ associé à l'onde de vitesse u_I est linéairement dégénéré si et seulement si*

$$u_I = u_1, u_2 \text{ ou } \frac{\alpha_1 \rho_1 u_1 + \alpha_2 \rho_2 u_2}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2}.$$

On peut remarquer que la définition de u_I (IV.38) obtenue par dérivation ne vérifie pas cette propriété. On définit maintenant l'énergie totale du système et le flux associé par

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}) = \alpha_1 \rho_1 (e_1 + u_1^2/2) + \alpha_2 \rho_2 (e_2 + u_2^2/2),$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}) = \alpha_1 u_1 (p_1 + \rho_1 (e_1 + u_1^2/2)) + \alpha_2 u_2 (p_2 + \rho_2 (e_2 + u_2^2/2)),$$

où e_k est l'énergie interne associée à la loi de pression p_k . On obtient alors le résultat suivant :

Proposition IV.5. *Supposons que $u_I = \beta(\mathbf{U})u_1 + (1 - \beta(\mathbf{U}))u_2$. alors les solutions régulières du système associé au membre de gauche de (IV.37) vérifie l'équation*

$$\partial_t \mathcal{E} + \partial_x \mathcal{F} = 0$$

si et seulement la pression interfaciale est donnée par

$$p_I = \beta(\mathbf{U})p_2 + (1 - \beta(\mathbf{U}))p_1.$$

Dans le cas contraire, un terme différentiel non conservatif en $\partial_x \alpha_1$ apparaît dans l'équation d'énergie totale. Pour plus de détails sur l'analyse de ce type de systèmes, on renvoie à [GHS04].

Bibliographie

- [ABB⁺04] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2050–2065 (electronic), 2004.
- [Asa97] F. Asakura. Global solutions with a single transonic shock wave for quasi-linear hyperbolic systems. *Methods Appl. Anal.*, 4(1) :33–52, 1997.
- [BGKT08] R. Bürger, A. García, K. H. Karlsen, and J. D. Towers. A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux. *J. Engrg. Math.*, 60(3-4) :387–425, 2008. :kinematic
- [BN86] M. R. Baer and J. W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 12 :861–889, 1986.
- [BOP07] F. Bouchut, H. Ounaissa, and B. Perthame. Upwinding of the source term at interfaces for Euler equations with high friction. *Comput. Math. Appl.*, 53(3-4) :361–375, 2007.
- [Bou04] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004. :*onlin*
- [CCG⁺10] C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P.-A. Raviart, and N. Seguin. Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter dependent source. The case of Euler system with friction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2010. Accepted for publication. :AS
- [CLS04] A. Chinnayya, A.-Y. LeRoux, and N. Seguin. A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. *Int. J. Finite Volumes*, pages 1–33, 2004.
- [CT80] M.G. Crandall and L. Tartar. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. AMS*, 78(3) :385–390, 1980.
- [DP98] D. A. Drew and S. Passman. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, New-York, 1998.
- [DP09] C. M. Dafermos and R. Pan. Global BV solutions for the p -system with frictional damping. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(3) :1190–1205, 2009. :asy

- [Dre49] R. F. Dressler. Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2 :149–194, 1949.
- [GHS03] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Comput. & Fluids*, 32(4) :479–513, 2003. `:somegodun`
- [GHS04] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(5) :663–700, 2004. `:numer`
- [GL96a] L. Gosse and A.-Y. LeRoux. Un schéma-équilibre adapté aux lois de conservation scalaires non-homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 323(5) :543–546, 1996. `:un`
- [GL96b] J. M. Greenberg and A.-Y. LeRoux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1) :1–16, 1996.
- [GL04] P. Goatin and P. G. LeFloch. The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(6) :881–902, 2004. `:rieman`
- [GP01] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102, 2001. `:deriv_saint_venan`
- [GR91] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 3/4 of *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1991. `:hyper`
- [Has10] B. Haspot. Cauchy problem for viscous shallow water equations with a term of capillarity. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(7) :1049–1087, 2010.
- [Hil07] M. Hillaret. Propagation of density-oscillations in solutions to the barotropic compressible Navier-Stokes system. *J. Math. Fluid Mech.*, 9(3) :343–376, 2007. `:densite`
- [HLvL83] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 25(1) :35–61, 1983.
- [IH06] M. Ishii and T. Hibiki. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer, New York, 2006. With a foreword by Lefteri H. Tsoukalas.
- [Ish75] M. Ishii. *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*. Eyrolles, Paris, 1975.
- [IT92] E. Isaacson and B. Temple. Nonlinear resonance in systems of conservation laws. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(5) :1260–1278, 1992. `:nonlin`
- [IT95] E. Isaacson and B. Temple. Convergence of the 2×2 Godunov method for a general resonant nonlinear balance law. *SIAM J. Appl. Math.*, 55(3) :625–640, 1995. `:convergodun`

- [JK00] S. Jin and M. A. Katsoulakis. Hyperbolic systems with supercharacteristic relaxations and roll waves. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(1) :273–292 (electronic), 2000. :rollwaves
- [JL96] S. Jin and C. D. Levermore. Numerical schemes for hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms. *J. Comput. Phys.*, 126(2) :449–467, 1996.
- [Kat78] T. Kato. Trotter’s product formula for an arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups. In *Topics in functional analysis (essays dedicated to M. G. Kreĭn on the occasion of his 70th birthday)*, volume 3 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 185–195. Academic Press, New York, 1978.
- [Kru70] S. N. Kruzhkov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81(123) :228–255, 1970.
- [LeR99] A.-Y. LeRoux. Riemann solvers for some hyperbolic problems with a source term. In *Actes du 30ème Congrès d’Analyse Numérique : CANum ’98 (Arles, 1998)*, volume 6 of *ESAIM Proc.*, pages 75–90 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1999. :canum
- [Mar07] F. Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 26(1) :49–63, 2007. :deriv
- [Mei10] Ming Mei. Best asymptotic profile for hyperbolic p -system with damping. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 42(1) :1–23, 2010. :Asy
- [Nob09] P. Noble. *Analyse d’écoulements en eaux peu profondes et stabilité de solutions périodiques pour les équations de Saint Venant et des systèmes hamiltoniens discrets*. Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard (Lyon I), 2009. :hdr
- [SA99] R. Saurel and R. Abgrall. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *J. Comput. Phys.*, 150(2) :425–467, 1999. :7eq
- [Ser91] D. Serre. Variations de grande amplitude pour la densité d’un fluide visqueux compressible. *Phys. D*, 48(1) :113–128, 1991. :densite
- [Sto92] J. J. Stoker. *Water waves*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. The mathematical theory with applications, Reprint of the 1957 original, A Wiley-Interscience Publication. :water
- [SV71] J.-C. Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 73 :147–154, 1871.
- [SW84] H. B. Stewart and B. Wendroff. Two-phase flow : models and methods. *J. Comput. Phys.*, 56(3) :363–409, 1984.
- [Tro59] H. F. Trotter. On the product of semi-groups of operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :545–551, 1959.
- [Vas01] A. Vasseur. Strong traces for solutions of multidimensional scalar conservation laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 160(3) :181–193, 2001. :traces