Master 2 CSA — Université de Rennes 1
2016–2017

# Propagation d'ondes (EDP hyperboliques)

*Seules les notes de cours sont autorisées*

Durée : 1 heure et demie

**Exercice 1.** On considère la vitesse $a$ définie par

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1[ \cup [3,4], \\ -1 & \text{si } t \in [1,3[ \end{cases} \tag{1}$$

et l'équation de transport associée

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + a(t)\partial_x u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

1. Définir les courbes caractéristiques associé à ce problème et les calculer explicitement pour toute position initiale $x_0$ et $t \in [0,4]$. Les tracer dans le plan $(x,t)$.
2. Démontrer que la solution $u$ de (2) est constante le long des caractéristiques.
3. Quels sont les temps pour lesquels la solution est égale à la donnée initiale ? Tracer la solution $u$ aux temps $t = 1,5$ et $t = 3,5$ pour $u_0(x) = \sin(x)$.

**Exercice 2.** On considère l'équation de trafic routier

$$\partial_t u + \partial_x(uV(u)) = 0 \tag{3}$$

où $V(u) = 10(1-u)$ est la vitesse des voitures (en $m/s$) en fonction de la proportion de voiture $u$, qui est supposée entre 0 et 1.

1. Résoudre le problème de Riemann pour l'équation (3), c'est-à-dire donner la solution explicite pour des données initiales du type

$$u(0,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

   avec $u_g$ et $u_d$ dans $[0,1]$.
2. Déduire l'ensemble des données initiales $(u_g, u_d)$ telles que $u(t,x) = u_g$ pour tout $t \geqslant 0$ et $x < 0$.
3. Calculer la solution exacte pour la donnée initiale

$$u(0,x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x < 0, \\ 1/2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   La tracer à différents temps pour montrer son évolution.