Examen terminal

Lundi 24 avril 2017. Durée : 2 heures.

Le sujet se compose de quatre pages et de deux exercices indépendants.

Exercice 1. Un problème d'homogénéisation

Soit $f \in L^2(]0,1[)$ et soit D une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue, strictement positive et périodique de période 1. Le but de ce problème est d'étudier l'équation

$$(1) \qquad \begin{cases} -\left(D\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)u_\varepsilon'\right)' = f \quad \text{dans} \quad]0,1[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \end{cases}$$

lorsque le paramètre $\varepsilon > 0$ tend vers 0.

1. Ecrire (sans faire de démonstration) la formulation variationnelle associée au problème (1). Donner l'expression de la forme bilinéaire a_ε et de la forme linéaire ℓ qui interviennent dans cette formulation.

2. Montrer qu'il existe une unique solution u_ε pour cette formulation variationelle.

3. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de ε tel que:
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C.$$

4. En déduire que pour toute suite ε_n tendant vers 0, il existe une fonction $u_0 \in H_0^1(]0,1[)$ et une suite extraite (que l'on notera encore ε_n) telles que
$$\lim_{n\to\infty} \|u_{\varepsilon_n} - u_0\|_{L^2} = 0.$$

5. Donner, en fonction de D, l'expression de la fonction 1-périodique χ vérifiant
$$\chi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\left(D(y)(1+\chi'(y))\right)' = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}.$$
On donnera la valeur constante que prend la fonction $D(y)(1+\chi'(y))$, notée D_0 par la suite.

6. Soit u_ε la solution obtenue à la question 2, et ϕ une fonction de $\mathcal{D}(]0,1[)$. Montrer que l'on peut appliquer la formulation variationnelle de la question 1 à la fonction

$$v(x) = \phi(x) + \varepsilon \phi'(x) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

et que u_ε vérifie alors

$$D_0 \int_0^1 u_\varepsilon'(x)\phi'(x)dx + r_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi) = \ell(\phi) + s_\varepsilon(\phi),$$

avec

$$r_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi) = \varepsilon \int_0^1 D\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon'(x)\phi''(x)dx, \qquad s_\varepsilon(\phi) = \varepsilon \int_0^1 f(x)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi'(x)dx,$$

et ℓ la forme linéaire obtenue à la question 1.

7. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon(u_\varepsilon, \phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} s_\varepsilon(\phi) = 0.$$

8. Montrer que si ε_n est la suite extraite obtenue à la question 4, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_{\varepsilon_n}'(x)\phi'(x)dx = -\int_0^1 u_0\, \phi'' dx.$$

9. En déduire que la limite u_0 est la solution du problème homogénéisé

$$-D_0\, u_0'' = f, \qquad u_0(0) = u_0(1) = 0.$$

Exercice 2. Deux équations elliptiques couplées

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, régulier. Pour $f_1,\ f_2 \in L^2(\Omega)$, on s'intéresse au système

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u_1 + u_2 = f_1 & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 = f_2 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{2}$$

d'inconnues u_1 et u_2, avec diverses conditions aux limites.

1. On considère dans cette question les conditions aux limites de Dirichlet :

   $$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3}$$

   Soit $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. On appelle *solution faible* de (2), (3) un couple $(u_1, u_2) \in V$ satisfaisant (2) au sens des distributions.

   (a) Démontrer que $(u_1, u_2) \in V$ est solution faible du problème si, et seulement si, ce couple satisfait la formulation variationnelle suivante : pour tout $(v_1, v_2) \in V$, on a

   $$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx + \int_\Omega (u_2 \, v_1 - u_1 \, v_2) \, dx = \int_\Omega (f_1 \, v_1 + f_2 \, v_2) \, dx.$$

   (b) Démontrer que le problème admet une unique solution faible.

   (c) En utilisant un théorème du cours, démontrer que $u_1 \in H^2(\Omega)$ et que $u_2 \in H^2(\Omega)$.

2. On considère dans cette question les conditions aux limites de Neumann :

   $$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \tag{4}$$

   où n désigne le vecteur normal sortant à $\partial\Omega$. Pour résoudre (2), (4), on introduit pour $k \in \mathbb{N}^*$ le système

   $$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u_1 + u_2 + \dfrac{1}{k} u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 - u_1 + \dfrac{1}{k} u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{5}$$

   avec les conditions aux limites (4). On note désormais $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et on appelle *solution faible* de (5), (4) un couple $(u_1, u_2) \in V$ satisfaisant la formulation variationnelle suivante : pour tout $(v_1, v_2) \in V$, on a

   $$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, dx \quad & + \int_\Omega (u_2 \, v_1 - u_1 \, v_2) \, dx \\ & + \frac{1}{k} \int_\Omega (u_1 \, v_1 + u_2 \, v_2) \, dx = \int_\Omega (f_1 \, v_1 + f_2 \, v_2) \, dx. \end{aligned}$$

   (on désigne de la même façon par solution faible de (2), (4) un couple $(u_1, u_2) \in V$ satisfaisant cette formulation variationnelle dans laquelle on remplace $\frac{1}{k}$ par 0).

(a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, (5), (4) admet une unique solution faible, que l'on note $(u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$.

(b) Démontrer l'estimation

$$\|u_1^{(k)}\|_{L^2}^2 + \|u_2^{(k)}\|_{L^2}^2 \leq \|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2$$

et en déduire que les suites $(u_1^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_2^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées dans $H^1(\Omega)$.

(c) En faisant tendre k vers l'infini, montrer que le problème (2), (4) admet une solution faible, puis montrer que cette solution faible est unique.

(d) En utilisant un théorème du cours, démontrer que $u_1 \in H^2(\Omega)$ et que $u_2 \in H^2(\Omega)$. En déduire que (2), (4) admet une unique solution $(u_1, u_2) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$.

3. *Question bonus, facultative.* Traiter le cas des conditions aux limites suivantes :

$$u_1 = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{6}$$