Master 2 CSA Université de Rennes 1
2017–2018

Propagation d'ondes (EDP hyperboliques)

Seules les notes de cours sont autorisées — Durée : 2 heures

Exercice 1. (4 points) On considère la vitesse a définie par $a(t) = \sin t + 1$ et l'équation de transport associée

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + a(t)\partial_x u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Tracer le graphe de la fonction a.
2. Définir les courbes caractéristiques associé à ce problème et les calculer explicitement pour toute position initiale x_0 et $t \in [0, 2\pi]$. En tracer quelques unes dans le plan (x,t).
3. Démontrer que la solution u de (1) est constante le long des caractéristiques.

Exercice 2. (3 points)
On considère maintenant le problème sur domaine borné

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (\sin t)\partial_x u(t,x) = 0, & t > 0, x \in]0,1[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in]0,1[. \end{cases} \tag{2}$$

Déterminer les valeurs de t pour lesquelles on doit imposer une donnée au bord $x = 0$. Faire de même pour le bord $x = 1$. (Justifier bien sûr…)

Exercice 3. (13 points)
On considère l'équation de Burgers modifiée

$$\partial_t u + \partial_x (u^2) = 0. \tag{3}$$

1. Après avoir déterminer si le flux $f(u) = u^2$ est convexe ou concave, calculer la fonction réciproque de f', c'est-à-dire $(f')^{-1}$.
2. Résoudre le problème de Riemann pour l'équation (3), c'est-à-dire donner la solution explicite pour des données initiales du type

$$u(0,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

   avec u_g et u_d dans $\mathbb{R}$.
3. Déduire l'ensemble des valeurs de (u_g, u_d) telles que $u(t,x) = u_d$ pour tout $t \geqslant 0$ et $x > 0$.
4. On considère la donnée initiale

$$u(0,x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

   (a) Montrer que la solution associée est composée de deux ondes de choc qui s'intersectent.
   (b) Déterminer le temps et la position de cette intersection.
   (c) Que se passe-t-il après le temps d'intersection ? (On pourra utiliser un dessin des ondes de choc dans le plan (x,t).)